Untersuchungen über extremalendliche Halbgruppen von Matrizen mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Halbgruppen

Dissertation

dem Fachbereich Mathematik

der

Eberhard - Karls - Universität

zu Tübingen

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

PANAJOTIS MAROUDAS

aus Patras

Griechenland

1978

Untersuchungen über extremalendliche Halbgruppen von Matrizen mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Halbgruppen

Dissertation

dem Fachbereich Mathematik

der

Eberhard - Karls - Universität

zu Tübingen

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

PANAJOTIS MAROUDAS

aus Patras

Griechenland

1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation : 28. April 1978

Dekan	:	Prof. Dr. W. Kaup
1. Berichterstatter	:	Prof. Dr. H. Heyer
2. Berichterstatter	:	Prof. Dr. W. Hazod

Meinen Eltern

in Dankbarkeit

gewidmet

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

EINLEITUNG II

BEZEICHNUNGEN XII

I. VORBEREITUNGEN

1. Substochastische und Subintensitäts- Matrizen..... 1
2. Darstellung einer endlichen Halbgruppe durch eine Teilmenge von stochastischen Matrizen..... 7

II. WAHRSCHEINLICHKEITSMAßE AUF HALBGRUPPEN

1. Eigenschaften abstrakter bzw. topologischer Halbgruppen..... 11
2. Exponential- und Poissonmaß auf einer endlichen Halbgruppe..... 16

III. EXTREMALENDLICHE HALBGRUPPEN

1. Definition und erste Eigenschaften..... 20
2. Idempotente Elemente einer E-Halbgruppe..... 28
3. Gestalt idempotenter stochastischer Matrizen..... 35
4. Gruppen in einer E- Halbgruppe..... 40

IV. UNENDLICH TEILBARE ELEMENTE EINER EXTREMALENDLICHEN HALBGRUPPE

1. Kennzeichnung der unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer endlichen Halbgruppe..... 46
2. Kennzeichnung der unendlich teilbaren Elemente einer E-Halbgruppe..... 55

V. GRENZWERTSÄTZE FÜR EXTREMALENDLICHE HALBGRUPPEN

1. Limiten kommutativer, infinitesimaler Dreieckssysteme in einer E-Halbgruppe..... 61
2. Konvergenz der Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ in einer E-Halbgruppe..... 67
3. Konvergenz des unendlichen Produktes einer Maximoff-Folge in einer E-Halbgruppe..... 76

LITERATURVERZEICHNIS 81

VERZEICHNIS DER VERWENDETEN SYMBOLE 86

E I N L E I T U N G

Es ist wohlbekannt, daß eine zeitlich diskrete Markoffsche Kette auf einem endlichen Zustandsraum durch eine stochastische (nxn-) Matrix M, eine sogenannte Übergangsmatrix, charakterisiert ist ($n \in \mathbb{N}$). Das Problem des Auffindens einer stetigen Matrixfunktion $t \longmapsto M(t)$ auf $\mathbb{R}_+$, deren Werte stochastische Matrizen sind, derart daß $M(1) = M$, $M(0) = I$ (die Einheitsmatrix) und $M(t_1+t_2) = M(t_1)\,M(t_2)$ für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ gilt (oder in einer anderen Sprechweise, des Auffindens einer stetigen Halbgruppe $\{M(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ von stochastischen Matrizen mit den Eigenschaften $M(1) = M$, $M(0) = I$), wird das Einbettungsproblem für endliche Markoffsche Ketten genannt. Falls eine solche Matrixfunktion $t \longmapsto M(t)$ auf $\mathbb{R}_+$ existiert, sagt man, daß die zeitlich diskrete, endliche Markoffsche Kette eingebettet werde, oder einfacher, daß M einbettbar sei.

Das Einbettungsproblem für endliche Markoffsche Ketten hat zuerst G. Elfving im Jahre 1937 formuliert [9] ; er hat zugleich ein Kriterium für die Einbettbarkeit der Übergangsmatrix M in Gestalt von Eigenschaften des ln M angegeben, und zwar für den Fall, daß alle Eigenwerte von M verschieden sind. Im Jahre 1962 hat J.F.C. Kingman bewiesen, daß die einbettbaren, nicht-singulären, stochastischen Matrizen genau die (nicht-singulären, stochastischen) unendlich teilbaren Matrizen sind [14] .

Im Anschluß an die Arbeit [14] ergeben sich die folgenden Fragen :

(α) Gilt die Äquivalenz zwischen Einbettbarkeit und Unendlich - Teilbarkeit allgemeiner für eine die nicht-singulären stochastischen Matrizen umfassende Menge von Matrizen ?

(β) Falls die Frage (α) positiv beantwortet wird, fragt man weiter, welche Gestalt dann die unendlich teilbaren Elemente dieser Menge haben ?

(γ) Sind ferner die Parameter, welche in der Gestalt der unendlich teilbaren Elemente auftreten, eindeutig bestimmt ?

Die Beantwortung dieser drei Fragen bildet den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit.

Unsere Beweise stützen sich teilweise auf eine Methode, die im Jahre 1972 S. Johansen für das Einbettungsproblem der nicht-singulären, stochastischen Matrizen entwickelt hat [13]. Diese Methode hat uns auf den Begriff der extremalendlichen Halbgruppen von Matrizen geführt [siehe Kap. III, § 1.1]

Beispiele für extremalendliche Halbgruppen von Matrizen sind die Mengen $\mathfrak{S}(n)$, $\mathfrak{P}(n)$ bzw. $\mathfrak{D}(n)$ aller substochastischen, stochastischen bzw. doppelt stochastischen nxn-Matrizen, sowie (mittels spezieller Darstellungen) die Halbgruppe der konvexen Hülle aller n-ten Einheitswurzeln, und die Halbgruppe der Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer endlichen Halbgruppe mit Einselement.

Der Klasse der extremalendlichen Halbgruppen und ihren Anwendungen in der Theorie der Einbettung ist die vorliegende Arbeit gewidmet.
Wir geben eine kurze Übersicht über den Inhalt der einzelnen Kapitel.

Kapitel I enthält die grundlegenden Begriffe und Sätze, soweit diese im Verlauf der Arbeit benötigt werden. Insbesondere befaßt sich Kapitel I mit dem Auffinden der Extremalpunkte der konvexen, kompakten Menge $\mathfrak{S}(n)$ aller substochastischen Matrizen.
Die Extremalpunkte der Menge $\mathfrak{D}(n)$ wurden erfolgreich von G. Birkhoff [2] bestimmt. Siehe auch das Buch [26] von H.H. Schaefer. Die von uns angewandte Methode, basierend auf Konvexitätsargumenten, liefert als Spezialfall die Extremalpunktmenge von $\mathfrak{P}(n)$ und nach einer kleinen Verfeinerung auch das bekannte Resultat von G. Birkhoff.
Darüber hinaus erhalten wir die Menge der Extremalpunkte gewisser konvexer, kompakter Teilmengen von Subintensitäts-, Intensitäts- bzw. starken Intensitätsmatrizen (in Zeichen $\mathfrak{I}_{sub}(n)$, $\mathfrak{I}(n)$ bzw. $\mathfrak{I}_{st}(n)$).

Kapitel I enthält u.a. Details über eine spezielle treue Darstellung D einer endlichen Halbgruppe

$\mathfrak{I} = \{s_1, s_2, \ldots s_m\}$ $(m \in \mathbb{N})$ mit Einselement durch eine Teilmenge von Extremalpunkten der Menge $\mathfrak{P}(m)$, sowie über die Fortsetzung dieser Darstellung auf die Menge $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{I})$ der beschränkten Maße auf $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{P}(m)$.

In Kapitel II sind grundlegende Begriffe und Sätze der Theorie abstrakter bzw. topologischer Halbgruppen, sowie der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Halbgruppen erwähnt, soweit diese im Verlauf der Arbeit gebraucht werden.
Sofern die Sätze bekannt oder nur umformuliert sind, wird bzgl. der Beweise im allgemeinen auf die entsprechende Literatur verwiesen.
Speziell sind in diesem Kapitel für eine endliche Halbgruppe $\mathfrak{I}$ und ein idempotentes Wahrscheinlichkeitsmaß ε auf $\mathfrak{I}$ (in Zeichen $\varepsilon \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{I})$) die ε-Exponentialfunktion und die ε-Logarithmusfunktion auf gewissen Teilmengen von $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{I})$ eingeführt, einige ihrer elementaren Eigenschaften gesammelt und schließlich mittels der ε-Exponentialfunktion die ε-Poissonmaße in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{I})$ definiert worden.

Kapitel III befaßt sich mit extremalendlichen Halbgruppen und besteht aus vier Abschnitten.

Der erste Abschnitt enthält die Definition einer extremalendlichen Halbgruppe (kürzer E-Halbgruppe) $\mathfrak{T}$ von Matrizen, sowie zwei Klassen von Beispielen.
Ein weiteres Beispiel zeigt die Existenz von nicht-extremalendlichen Halbgruppen, welche aber dennoch eine endliche Menge von Extremalpunkten besitzen.
Es werden danach Eigenschaften von E-Halbgruppen zusammengestellt. Die Betonung liegt auf der Eigenschaft, daß stetige, affin-homomorphe Bilder einer E-Halbgruppe wiederum E-Halbgruppen bilden [Satz 1.5]. Mittels dieser Eigenschaft wird eine E-Halbgruppe als stetiges affin-homomorphes Bild einer E-Halbgruppe von stochastischen Matrizen geeigneter Dimension gekennzeichnet [Satz 1.10].

Im zweiten Abschnitt verfolgen wir das Ziel, die Menge $\mathfrak{J}$ aller idempotenten Elemente einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ zu charakterisieren und anschließend zu beschreiben.
Am Anfang zeigen wir, daß sich $\mathfrak{J}$ durch die idempotenten

Wahrscheinlichkeitsmaß auf der von den Extremalpunkten von $\mathfrak{T}$ erzeugten Halbgruppe $\mathfrak{G}$ (in Zeichen $\mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$) kennzeichnen läßt [Satz 2.1].
Im weiteren führen wir den Begriff der Trägermenge eines Elements $A \in \mathfrak{T}$ ein und ziehen Resultate der Arbeit [28] von S. Schwarz heran.
Zunächst beweisen wir die Äquivalenz : $A \in \mathfrak{J} \Longleftrightarrow A$ stellt eine konvexe Kombination von Bildern geeigneter normierter Haar-Maße unter der Resultanten (kürzer : R-Bilder) dar. Diese normierten Haar-Maße erhält man im Anschluß an die Auswahl einer beliebigen, (vollständig) einfachen Unterhalbgruppe $\mathfrak{h}_\gamma$ von $\mathfrak{G}$ dadurch, daß man $\mathfrak{h}_\gamma$ in disjunkte, paarweise isomorphe Gruppen zerlegt und diesen ihre zugehörigen, normierten Haar-Maße zuordnet [Korollar 2.4].
Danach zeigen wir, daß sich die Menge $\mathfrak{J}_\mathfrak{k}$ aller primitiven Idempotenten einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ durch die primitiven idempotenten Maße in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$ charakterisieren läßt [Satz 2.6].
Daraufhin beweisen wir die Äquivalenz : $A \in \mathfrak{J}_\mathfrak{k} \Longleftrightarrow A$ stellt eine konvexe Kombination von R-Bildern geeigneter normierter Haar-Maße dar. Diese normierten Haar-Maße sind dabei beliebigen, disjunkten, paarweise isomorphen Gruppen zugeordnet, welche in der Zerlegung des stets existierenden Kernes $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ auftreten [Korollar 2.7].
Schließlich beschreiben wir die Menge derjenigen Idempotenten einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$, welche die R-Bilder von maximalen idempotenten Maßen in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$ enthält. Im Falle, daß $\mathfrak{G}$ selbst eine (vollständig) einfache Halbgruppe bzw. eine Gruppe bildet, besteht diese Menge aus allen $A \in \mathfrak{J}$ mit einem Träger $\mathfrak{h}_\gamma$, der die folgende Eigenschaft besitzt: $\mathfrak{h}_\gamma$ ist eine (vollständig) einfache Unterhalbgruppe von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{h}_\gamma$ enthält keine echte Unterhalbgruppe, welche bereits alle Idempotenten aus $\mathfrak{h}_\gamma$ umfaßt [Satz 2.11].

Der dritte Abschnitt befaßt sich mit dem Problem des Auffindens der idempotenten stochastischen Matrizen, deren stetiges homomorphes $\mathfrak{f}$-Bild (im Sinne der Charakterisierung des Satzes 1.10) die Menge $\mathfrak{J}$ aller Idempotenten einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ ergibt.

Für jedes $A \in \mathfrak{J}$ haben wir das entsprechende $\mathfrak{f}$-Urbild durch seine Koeffizienten beschrieben und dadurch in geeignete idempotente, stochastische quadratische Matrizen, sowie in (nicht-notwendigerweise quadratische) stochastische Matrizen und Nullmatrizen zerlegt.
Wir schließen den dritten Abschnitt mit einem konkreten Beispiel, das die Gestalt des $\mathfrak{f}$-Urbildes eines idempotenten Elements A in besonders klarer Weise darstellt.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird die Klasse der Gruppen in einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ untersucht.
Mit Hilfe der tiefliegenden Strukturssätze von P. Martin-Löf [siehe Kap. II, Sätze 2.1 und 2.2] haben wir zunächst folgende Resultate gewonnen: Erstens, daß jede Gruppe Γ von beschränkten positiven Maßen auf einer endlichen Halbgruppe $\mathfrak{J}$ (und erst recht jede Gruppe Γ in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{J})$) endlich ist [Satz 4.1] und zweitens, daß sich die Menge $\mathbf{\Gamma} := \mathbf{\Gamma}(\mathfrak{M}^1(\mathfrak{J}))$ aller Gruppen Γ in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{J})$ bzgl. der Gruppenordnung in endlich viele Äquivalenzklassen zerlegen läßt [Korollar 4.2].
Auf das erste Resultat baut sich unsere Untersuchung in einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ auf; das zweite wird im nächsten Kapitel ausgenützt.
Wir zeigen nun, daß jede Gruppe $\mathfrak{G}$ in einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ (und somit jede Gruppe von substochastischen, stochastischen bzw. doppelt stochastischen Matrizen) endlich ist und sich als homomorphes R-Bild einer Gruppe von Maßen in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$ darstellen läßt [Satz 4.3 und Korollar 4.4].
Dies gibt Anlaß zu einem Bestimmungsverfahren für die Menge $\mathbf{G} := \mathbf{G}(\mathfrak{T})$ aller Gruppen in $\mathfrak{T}$, das wir anschließend ausführlich beschreiben werden.
Wir setzen die Untersuchung mit einem Kriterium für die Endlichkeit der Menge $\mathbf{G}$ fort; und zwar ist $\mathbf{G}$ genau dann von endlicher Ordnung, wenn die R-Bilder der normierten Haar-Maße derjenigen Gruppen, die in der Zerlegung von jeder (vollständig) einfachen Unterhalbgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ auftreten, identisch sind [Satz 4.6].
Insbesondere ist also $\mathbf{G}$ endlich, wenn jede einfache Unterhalbgruppe von $\mathfrak{G}$ eine Gruppe ist, oder wenn $\mathfrak{G}$ selbst eine Gruppe bildet.

Eines unserer Anliegen war es, den bekannten Satz, wonach jede beschränkte und somit kompakte Gruppe $\mathcal{G}$ von nicht-negativen Matrizen endlich ist [siehe [4], Theorem 2 und [10], Theorem 3], durch Anwendung des von uns in diesem Abschnitt beschriebenen Verfahrens neu zu gewinnen; d.h., einen Beweis zu finden, welcher weder die Theorie der Lieschen Gruppen [Methode von D.R. Brown in [4]] noch die geometrische Beschreibung der Wirkung positiver Matrizen [Methode von P. Flor in [10]] verwendet.
Dies gelang uns jedoch nicht.

Kapitel IV ist dem eigentlichen Studium der unendlich teilbaren Elemente einer E-Halbgruppe $\mathcal{T}$ gewidmet und wird in zwei Abschnitte gegliedert.

Der erste Abschnitt bringt einen vollständigen Beweis der bekannten Charakterisierung, wonach ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf einer endlichen Halbgruppe $\mathcal{J}$ genau dann unendlich teilbar ist, wenn μ ein Poissonmaß ist [Satz 1.6]. Diese Kennzeichnung wurde in der Arbeit [18], § 9.2 von P. Martin-Löf angegeben, jedoch ohne vollständigen Beweis; vielmehr hat hierzu P. Martin-Löf auf die Arbeiten von N.N. Vorobjov [30], von B.M. Kloss [15b], [15c] und von W. Böge [3a] verwiesen.
Da diese Arbeiten aber voraussetzen, daß die zugrundeliegende Menge $\mathcal{J}$ eine Gruppe sei, so sind wir einer Idee von L. Schmetterer gefolgt und haben seine in [[27], Theorem 2.1] gegebene Charakterisierung der unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer endlichen Gruppe erweitert auf den Fall einer endlichen Halbgruppe.
Unser Beweis stützt sich nun grundsätzlich auf Satz 4.1 bzw. Korollar 4.2 von Kapitel III, welche die oben erwähnte Ausdehnung auf endliche Halbgruppen ermöglichen, sowie auf zwei weitere Lemmata: im ersten [§ 1.4] erweitern wir einen Satz von W. Böge [vgl. [3a], Hilfssatz 4.1 und [27], Theorem 2.1]; im zweiten [§ 1.5] geben wir notwendige Bedingungen dafür an, daß ein unendlich teilbares Wahrschein-

lichkeitsmaß μ auf einer endlichen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ein Poissonmaß ist.

Im letzten Abschnitt werden die unendlich teilbaren Elemente einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ mit Hilfe der im ersten Abschnitt erzielten Resultate als R-Bilder von Poissonmaßen auf der von den Extremalpunkten von $\mathfrak{T}$ erzeugten Halbgruppe $\mathfrak{G}$ identifiziert. In diesem Zusammenhang beweisen wir, daß ein $A \in \mathfrak{T}$ genau dann unendlich teilbar ist, wenn A von der exponentialen Gestalt $A = \exp_B [\alpha(P-B)]$ für ein Idempotent $B \in \mathfrak{T}$, ein $P \in B\mathfrak{T}B$ und eine positive Konstante α ist [Satz 2.8]. Es sei hervorgehoben, daß im allgemeinen nur das Idempotent B in der obigen exponentialen Darstellung von A eindeutig bestimmt ist. Unsere Kennzeichnung ist eine Verallgemeinerung der Charakterisierung von J.F.C Kingman für die unendlich teilbaren Elemente der Menge aller nicht-singulären, stochastischen Matrizen [vgl. [14], Proposition 7, und [13a], Theorem 2.2] auf die unendlich teilbaren Elemente einer E-Halbgruppe.
Schließlich formulieren wir den Begriff der Einbettbarkeit in dem allgemeineren Rahmen der E-Halbgruppen [§ 2.12] und weisen ferner die Äquivalenz zwischen Einbettbarkeit und Unendlich-Teilbarkeit für die Elemente der E-Halbgruppen nach [Satz 2.13]. Somit sind alle drei im Anschluß an die Arbeit [14] von J.F.C. Kingman gestellten Fragen positiv beantwortet.

Das letzte Kapitel handelt von Grenzwertsätzen in E-Halbgruppen und wird in drei Abschnitte gegliedert.

Im ersten Abschnitt werden die Limiten kommutativer, infinitesimaler Dreiecksysteme $\mathfrak{D}$ in einer E-Halbgruppe untersucht. Wir weisen nämlich nach, daß solche Limiten unendlich teilbare Elemente von $\mathfrak{T}$ sind und umgekehrt [Satz 1.4]. Diese Kennzeichnung, die wir mit eigener Methode gewonnen haben, verallgemeinert den entsprechenden Satz von S. Johansen für die Limiten kommutativer, infinitesimaler Dreiecksysteme von nicht-singulären stochastischen Matrizen

auf E-Halbgruppen [vgl. [13], Theorem 2.10].
Die Methode, die S. Johansen verwendet hat, um einen solchen Limes A zu kennzeichnen, nützt natürlich besonders stark die Nicht-Singularität und Stochastizität von A aus. Folglich ist sie für einen allgemeineren Fall nicht anwendbar, selbst nicht im speziellen Fall der Menge aller stochastischen (sowohl singulären, als auch nicht-singulären) Matrizen.
Ein Lemma von H. Carnal über "kleine Vektoren" [vgl. [5]] liefert das für unsere Charakterisierung entscheidende Hilfsmittel.
Das m-te Reihenprodukt $P_m := \prod_{k=1}^{k(m)} P_{m,k}$ des Dreiecksystems ϑ (m=1,2,...) läßt sich für vorgegebenes $p \in \mathbb{N}$ in p Teilprodukte zerlegen, nämlich $P_m = \prod_{i=1}^{p} \left(\prod_{k \in K_i} P_{m,k} \right)$, wobei die K_i, i = 1,2,...,p eine Zerlegung der Menge $\{1,2,...,k(m)\}$ bilden, derart, daß $\lim_{m\to\infty} \left\| \prod_{k \in K_i} P_{m,k} - \prod_{k \in K_j} P_{m,k} \right\| = 0$ für alle i,j = 1,2,...,p gilt.
Nun ziehen wir die Kompaktheit der E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$, innerhalb deren wir uns stets bewegen, heran. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $Q := \lim_{m\to\infty} \left(\prod_{k \in K_i} P_{m,k} \right)$ existiert, und zeigen, daß Q für alle i = 1,2,...,p fest bleibt, d.h., $A = \lim_{m\to\infty} P_m = Q^p$, was die gewünschte Unendlich-Teilbarkeit von A beweist.
Es sei hervorgehoben, daß man, wie aus dem Beweis der obigen Kennzeichnung folgt, die einschränkende Bedingung der Kommutativität des Dreieckssystems ϑ (sowohl im allgemeinen Fall einer E-Halbgruppe, als auch im speziellen von S. Johansen behandelten Fall) nicht beiseite lassen kann.

Im zweiten Abschnitt untersuchen wir die Konvergenz der Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ in einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ ($A \in \mathfrak{T}$).

Es sind verschiedene Bedingungen bekannt, unter denen $\lim_{n\to\infty} A^n$, $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ existiert, siehe z.B. [26]. Wir schlagen hier einen neuen Weg vor, der Bedingungen für die Konvergenz einer Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ in $\mathfrak{T}$ durch Eigenschaften eines speziellen Trägers des Elements A angibt. Zunächst betrachten wir für einen vorgegebenen Träger $\mathfrak{h}(A)$ von $A \in \mathfrak{T}$ den durch das in Lemma 2.1 beschriebene Verfahren erhaltenen speziellen Träger $\mathfrak{h}(P_A)$ des eindeutig bestimmten Idempotents $P_A \in \mathfrak{T}$, zu dem A gehört; $\mathfrak{h}(P_A)$ ist stets eine (vollständig) einfache Unterhalbgruppe von $\mathfrak{G}$.
Anschließend geben wir zwei Relationen zwischen einem beliebigen Träger $\mathfrak{h}(A)$ und dem Träger $\mathfrak{h}(P_A)$ an [Satz 2.3]. Es folgen Grenzwertsätze. Unter anderem weisen wir nach, daß die Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ in $\mathfrak{T}$ konvergiert, wenn A zu einem Idempotent $P_A \in \mathfrak{T}$ gehört, welches die Eigenschaft hat, daß alle seine Träger sich als Vereinigung von gewissen maximalen Gruppen des Kerns $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ darstellen lassen [Satz 2.8]. Insbesondere konvergiert also eine Folge $(A^n)_{n\geq 1}$, $A \in \mathfrak{D}(n)$, wenn jeder Träger von P_A mit der Extremalpunktmenge der E-Halbgruppe $\mathfrak{D}(n)$ übereinstimmt [Korollar 2.9].
Ferner beweisen wir die Konvergenz der Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ in $\mathfrak{T}$ unter der Voraussetzung, daß A einen Träger besitzt, der das Einselement von $\mathfrak{T}$ enthält [Satz 2.14].

Den Kern des letzten Abschnitts bilden die sogenannten Maximoff-Folgen $(A_k)_{k\geq 1}, A_k = (\alpha_{ij}^{(k)})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ in einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$, welche im Spezialfall der substochastischen, stochastischen bzw. doppelt stochastischen Matrizen durch die einfache Bedingung $\left|\alpha_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}\right| \leq \beta$, für ein $\beta \in [0,1[$ $(k=1,2,\ldots;\ i,j=1,2,\ldots,n)$ definiert werden können [Lemma 3.2]. Nach dem zweiten Abschnitt dieses Kapitels existiert sogar für jedes (feste) Element A_k $(k \in \mathbb{N})$ einer Maximoff-Folge $(A_k)_{k\geq 1}$ in $\mathfrak{T}$ der $\lim_{n\to\infty} (A_k)^n$. Darüber hinaus wird für den speziellen Fall, daß die Extremalpunkte von $\mathfrak{T}$ eine Gruppe erzeugen, die Konvergenz des unendlichen Produkts einer Maximoff-Folge in $\mathfrak{T}$, insbesondere also einer Maximoff-Folge von doppelt stochastischen Matrizen, bewiesen [Satz 3.3 und Korollar 3.4].

Anschließend wird durch ein Beispiel gezeigt, daß der Satz von V.M. Maximoff [vgl. [19], Theorem 12] über die Faltungskonvergenz jeder Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einer endlichen Gruppe ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht gelten kann, falls man die endliche Gruppe durch eine endliche Halbgruppe ersetzt [Beispiel 3.6].
Schließlich wird anhand dieses Beispiels durch Anwendung der in Kap. I, § 2.6 angegebenen treuen Darstellung gezeigt, daß die Konvergenz des unendlichen Produktes einer Maximoff-Folge von Matrizen in einer E-Halbgruppe im allgemeinen nicht gesichert ist.

Die Anregung zu dieser Arbeit stammt von Herrn Prof. Dr. H. Heyer, der mir stets mit Rat und Kritik weiterhalf. Den Zugang zur vorhandenen umfangreichen Literatur zu diesem Thema hat mir Herr Prof. Dr. W. Hazod verschafft. Herr Hazod hat mir in zahlreichen Gesprächen manche Anregung zuteil werden lassen.
Dafür möchte der Verfasser beiden Herren an dieser Stelle seine tiefe Anerkennung und seinen herzlichen Dank ausdrücken.

Tübingen, im Februar 1978

B E Z E I C H N U N G E N

ZAHLENMENGEN : Es bezeichne $\mathbb{N}$ die natürlichen, $\mathbb{Q}$ die rationalen, $\mathbb{R}$ die reellen und $\mathbb{C}$ die komplexen Zahlen. Ferner sei $\mathbb{R}_+$ bzw. $\mathbb{R}_+^*$ die Menge der nicht-negativen bzw. positiven reellen Zahlen.

Für jedes Paar (i,j) von Elementen einer Indexmenge $\mathfrak{I}$ werde durch δ_{ij} das Kronecker-Symbol bezeichnet.

Die Bezeichnung $n \geq 1$ bedeute stets, daß n alle Elemente von $\mathbb{N}$ durchläuft.

TOPOLOGISCHE VEKTORRÄUME : Im Mittelpunkt der Diskussion steht der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Es seien $(e_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ die kanonische Basis des Raumes $\mathbb{R}^n$ bestehend aus den Vektoren e_i mit den Komponenten $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ und e der Vektor des $\mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $1,1,\ldots,1$.

Ist $E \subset \mathbb{R}^n$, so bezeichne $\mathring{E}$ bzw. ∂E den offenen Kern bzw. den Rand von E.
Weiterhin bezeichne $\mathfrak{k}(E)$ die konvexe Hülle von E.

Der Begriff "kompakt" schließt stets das Hausdorffsche Trennungsaxiom mit ein.

MATRIZENMENGEN : Es sei $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ der Ring der nxn-Matrizen über $\mathbb{K}$.

Sei $M \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ mit $M = (m_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$.
Die m_{ij} heißen die Koeffizienten der Matrix M.
${}^tM$ bezeichne stets die transponierte Matrix zu M.
$I = (\delta_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ sei die Einheitsmatrix in $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ und 0 die Nullmatrix in $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$.

Im weiteren werden Teilmengen der Menge $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, beispielsweise die Menge der stochastischen Matrizen, mit geeigneten Teilmengen der Menge $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ aller Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ bzw. von $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert.

Auf $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ werden im Verlauf der vorliegenden Arbeit zwei Normen benützt : Wird nämlich $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ als

Teilmenge von $\mathbb{K}^{n^2}$ betrachtet, dann führen wir auf $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ die euklidische Norm ein, definiert durch $\|M\| := \left(\sum_{i,j=1}^{n} |m_{ij}|^2\right)^{1/2}$ $(M \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K}))$. Wird schließlich $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ als Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ betrachtet, dann versehen wir $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ mit der ℓ^∞-Matrizennorm, definiert durch $\|M\| := \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|$ $(M \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K}))$.

HALBGRUPPEN: $\mathfrak{H}$ sei stets eine beliebige Halbgruppe. Werden im folgenden spezielle Eigenschaften von $\mathfrak{H}$ verlangt, wie zum Beispiel Endlichkeit, Existenz eines Einselements [siehe Kap. I, § 2] oder Kompaktheit [siehe Kap. II, § 1], so werden diese immer explizit benannt.

$\ell(\mathfrak{H})$ bezeichne die Menge aller Extremalpunkte von $\mathfrak{H}$. Ferner sei $\mathfrak{K}$ der Kern von $\mathfrak{H}$.

$\mathfrak{I}$ bezeichne die Menge aller Idempotenten in $\mathfrak{H}$; weiter bezeichne $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$ bzw. $\mathfrak{I}_{\mathfrak{m}}$ die Menge aller primitiven bzw. maximalen Idempotenten in $\mathfrak{H}$.

$o(\mathfrak{H})$ stehe für die Kardinalzahl (oder Ordnung) der Halbgruppe $\mathfrak{H}$.

MAßE AUF ENDLICHEN HALBGRUPPEN: Es sei $\mathfrak{H} := \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ eine endliche Halbgruppe $(m \in \mathbb{N})$. Für $s \in \mathfrak{H}$ bezeichne ε_s das Dirac-Maß (die Einheitsmasse) in s.
Sei $\mathcal{M}^b(\mathfrak{H}) := \left\{\sum_{i=1}^{m} \beta_i \varepsilon_{s_i} : \beta_i \in \mathbb{R}\right\}$ der Vektorraum der beschränkten Maße auf $\mathfrak{H}$.
Weiter seien $\mathcal{M}^b_+(\mathfrak{H})$ der positive Kegel von $\mathcal{M}^b(\mathfrak{H})$ und $\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ die Teilmenge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{H}$.

$\mathfrak{I}$ bezeichne die Menge aller idempotenten Maße in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$; ferner bezeichne $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{M}$ die Menge aller primitiven bzw. maximalen idempotenten Maße in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$.

Vermöge der Bijektion $\varphi : \varepsilon_{s_k} \longmapsto e_{s_k} (:= e_k)$, $k=1,2,\ldots,m$, kann man $\mathcal{M}^b(\mathfrak{H})$ mit dem m-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$ identifizieren. Wir benützen das Symbol $\mathcal{L}(\mathcal{M}^b(\mathfrak{H}))$ für die Menge aller Endomorphismen von $\mathcal{M}^b(\mathfrak{H})$.

Weiter sei $\mu \longmapsto \|\mu\| := \sum_{s\in\mathfrak{H}} |\mu(\{s\})|$ (von $\mathcal{M}^b(\mathfrak{H})$

in $\mathbb{R}_+$) die Norm auf $\mathcal{M}^b(\mathcal{S})$, welche im Verlauf der vorliegenden Arbeit benützt wird. Die Restriktion der Norm auf $\mathcal{M}^b_+(\mathcal{S})$ ist ein Halbgruppen-Homomorphismus.

Sind $\mu,\nu \in \mathcal{M}^b(\mathcal{S})$, so bezeichne $\mu*\nu$ (kürzer $\mu\nu$) das Faltungsprodukt von μ mit ν definiert durch

$$(\mu\nu)(\{s\}) := \sum_{\{(p,r)\in \mathcal{S}\times\mathcal{S} \,:\, pr = s\}} \mu(\{p\})\,\nu(\{r\}) \text{ für alle } s \in \mathcal{S}.$$

Bekanntlich sind $\mathcal{M}^b(\mathcal{S})$ und $\mathcal{M}^b_+(\mathcal{S})$ bezüglich der Faltung "$*$" Halbgruppen. $\mathcal{M}^1(\mathcal{S})$ ist sogar eine kompakte Halbgruppe.

Eine Folge $(\mu_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{M}^1(\mathcal{S})$ heißt nun faltungskonvergent, wenn für jedes k=o,1,2,... die partielle Folge $(\nu_{k,m})_{m>k}$ von $(\mu_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $\nu_{k,m} := \mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_m$ konvergiert.

Für jedes Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{S})$ sei supp(μ) stets der Träger von μ.

Es bezeichne $\mathcal{G}$ eine in $\mathcal{S}$ enthaltene (und daher endliche) Gruppe. Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{S})$ heißt links- bzw. rechts $\mathcal{G}$-invariantes Maß, wenn für alle $g \in \mathcal{G}$ $\varepsilon_g\mu = \mu$ bzw. $\mu\varepsilon_g = \mu$ gilt.

Jedes $\mathcal{G}$-invariante Maß μ in $\mathcal{M}^1(\mathcal{G})$ wird normiertes Haar-Maß auf $\mathcal{G}$ genannt und durch $\omega_{\mathcal{G}}$ abgekürzt. ($\omega_{\mathcal{G}}(\{g\}) := 1/o(\mathcal{G})$ für alle $g \in \mathcal{G}$).

ALLGEMEINES: Die Numerierung der Sätze und Lemmata beginnt in jedem Kapitel von neuem. Wird ohne Angabe des Kapitels zitiert, so handelt es sich um das Kapitel, in dem das Zitat erscheint.

O.B.d.A ist die Abkürzung für "ohne Beschränkung der Allgemeinheit".

Beweisteile oder kurze Erläuterungen werden in eckigen Klammern [ ] eingeschlossen.

I. V O R B E R E I T U N G E N

§ 1 SUBSTOCHASTISCHE UND SUBINTENSITÄTS-MATRIZEN

1.1 Es sei $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ eine Matrix der Gestalt $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$. A heißt substochastisch, wenn für alle i=1,2,...,n gilt:

(i) $a_{ij} \geq 0$ für alle j = 1,2,...,n

(ii) $\sigma_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \in [0,1]$

Eine substochastische Matrix A wird stochastisch genannt, wenn $\sigma_i = 1$ für alle i=1,2,...,n (oder äquivalenterweise, wenn $Ae = e$ gilt).

Eine stochastische Matrix A heißt doppelt stochastisch, wenn $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ für alle j = 1,2,...,n gilt.

Mit $\mathbb{S}(n)$, $\mathbb{P}(n)$ bzw. $\mathbb{D}(n)$ bezeichnen wir die Menge der substochastischen, stochastischen bzw. doppelt stochastischen Matrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

1.2 Eine Matrix $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ der Gestalt $A=(a_{ij})_{ij=1,2,\ldots,n}$ wird Subintensitätsmatrix genannt, wenn für alle i=1,2,...,n gilt:

(i) $a_{ij} := \begin{cases} \leq 0, & \text{falls } j=1 \\ \geq 0, & \text{sonst} \end{cases}$ (j=1,2,...,n)

(ii) $\sigma_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \in]-\infty, 0]$

Eine Subintensitätsmatrix A heißt Intensitätsmatrix, wenn $\sigma_i = 0$ für alle i = 1,2,...,n gilt.
Eine Intensitätsmatrix A wird starke Intensitätsmatrix genannt, wenn mit A auch ${}^tA$ Intensitätsmatrix ist.

Für die Menge aller Subintensitäts-, Intensitäts- bzw. starken Intensitätsmatrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ benützen wir die Symbole $\mathbb{I}_{sub}(n)$, $\mathbb{I}(n)$ bzw. $\mathbb{I}_{st}(n)$.
Offenbar gilt $\mathbb{I}_{sub}(n) = \bigcup \{ \alpha(\mathbb{S}(n)-I) : \alpha \in \mathbb{R}_+ \}$, $\mathbb{I}(n) = \bigcup \{ \alpha(\mathbb{P}(n)-I) : \alpha \in \mathbb{R}_+ \}$ bzw. $\mathbb{I}_{st}(n) =$

$= \bigcup \{\alpha(\mathfrak{D}(n)-I) : \alpha \in \mathbb{R}_+\}$.

1.3 Eine Matrix $A \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ wird als (0,1)-Matrix bezeichnet, wenn für alle $i,j = 1,2,\ldots,n$ $\quad a_{ij} \in \{0,1\}$ ist.

Sei $\mathfrak{D}(n)$ die Menge aller (0,1)-Matrizen in $\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$ und seien weiter $\mathfrak{E}(n)$, $\mathfrak{F}(n)$ bzw. $\mathfrak{P}(n)$ die Mengen aller substochastischen, stochastischen bzw. doppelt stochastischen Matrizen in $\mathfrak{D}(n)$.

Offenbar bildet $\mathfrak{E}(n)$ bzw. $\mathfrak{F}(n)$ bzgl. der Matrizenmultiplikation eine Halbgruppe in $\mathfrak{D}(n)$. Ferner ist $\mathfrak{P}(n)$ eine Gruppe in $\mathfrak{D}(n)$. Die Elemente der Gruppe $\mathfrak{P}(n)$ werden bekanntlich Permutationsmatrizen der Ordnung n genannt.

1.4 Eine (geordnete) endliche Folge von Koeffizienten $a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2},\ldots,a_{i_kj_k}$ der Matrix $A \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{K})$ stellt eine Schleife [auf englisch "loop"; vgl. [23], § 1] in A dar, wenn gilt:

(i) k ist gerade

(ii) $i_1=i_2, \quad i_3=i_4, \quad \ldots, i_{k-1} = i_k$.

(iii) $j_2=j_3, j_4=j_5,\ldots, j_k=j_1$.

(iv) Die Paare (i_p,j_p), $p=1,2,\ldots,k$, sind alle voneinander verschieden.

Ist zudem jedes Element einer Schleife in A nicht-negativ bzw. strikt positiv, dann wird die Schleife nicht-negativ bzw. strikt positiv genannt.

BEISPIEL: Sei $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. Dann stellen (5,3,0,1,7,8) und (4,5,2,1) zwei Schleifen in A dar. Die erste davon ist nicht-negativ, die zweite strikt positiv.

1.5 Es sei C eine konvexe Teilmenge eines (topologischen) Vektorraumes E.

$a \in C$ heißt (geometrischer) Extremalpunkt von C, wenn für $x,y \in C$ mit $a = \lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda \in]0,1[$ folgt: $x = y = a$, oder äquivalenterweise, wenn $a = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i x_i$, $\vartheta_i \in]0,1[$ für alle $i = 1,2,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i = 1$,

$x_i \in C$ für alle $i = 1,2,\ldots,n$ impliziert $a = x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ [vgl. auch [6], Kap. VI, § 25].
Ist zudem E endlichdimensional mit Dim $E = n (\in \mathbb{N})$, dann gilt der Satz von Carathéodory: Jedes $x \in C$ läßt sich als konvexe Kombination von höchstens (n+1) Extremalpunkten von C schreiben [siehe [24], § 17.1 und [22], s. 10].
Mit $\mathfrak{k}(C)$ werde die Menge der Extremalpunkte von C bezeichnet.

1.6 SATZ: $\mathfrak{k}(\mathbb{S}(n)) = \mathbb{E}(n)$

Beweis: $\mathbb{S}(n)$ (betrachtet als Teilmenge des Raumes $\mathbb{R}^{n^2}$) bildet eine konvexe, kompakte Menge.

Wir zeigen: $\mathbb{E}(n) \subset \mathfrak{k}(\mathbb{S}n)$.

Es sei $A \in \mathbb{E}(n)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$. Ist dann

$A = \lambda A_1 + (1-\lambda)A_2$ für ein $\lambda \in]0,1[$ und $A_k \in \mathbb{S}(n)$ $(k=1,2)$,

$A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1,2,\ldots,n}$,

so folgt: $a_{ij} = \lambda a_{ij}^{(1)} + (1-\lambda) a_{ij}^{(2)}$ ist entweder = 0 oder = 1 $(i,j = 1,2,\ldots,n)$.
0 und 1 sind aber die Extremalpunkte des Intervalls $[0,1]$ und $a_{ij}^{(k)} \in [0,1]$ für alle $i,j = 1,2,\ldots,n$, $k = 1,2$.
Daher muß $a_{ij} = a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)}$ für alle $i,j = 1,2,\ldots,n$, $k = 1,2$ sein. D.h., $A = A_1 = A_2$, und somit ist die Inklusion $\mathbb{E}(n) \subset \mathfrak{k}(\mathbb{S}(n))$ nachgewiesen.

Ferner zeigen wir $\mathbb{S}(n) \setminus \mathbb{E}(n) \subset \mathbb{S}(n) \setminus \mathfrak{k}(\mathbb{S}(n))$.
Es sei $A \in \mathbb{S}(n) \setminus \mathbb{E}(n)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$. Dann existiert (mindestens) eine Zeile, etwa die k_o-te, die mindenstens ein Element aus $]0,1[$ enthält.
Es sind also zwei Fälle zu unterscheiden:
1. Fall: Die k_o-te Zeile enthält genau ein von Null (und somit auch von Eins) verschiedenes Element $a_{k_o j_o}$ $(\in]0,1[)$.

Man definiert die Matrizen $Q = (q_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ und

$P = (p_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$.

$$q_{ij} := \begin{cases} 1, \text{ falls } i=k_o,\ j=j_o. \\ a_{ij}, \text{ sonst.} \end{cases} ; \quad p_{ij} := \begin{cases} 0, \text{ falls } i=k_o,\ j=j_o \\ a_{ij}, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gehören Q und P zu $\mathfrak{S}(n)$, und es gilt:

$A = a_{k_o j_o} Q + (1-a_{k_o j_o})P \ (\ a_{k_o j_o} \in]o,1[)$. D.h., $A \notin \ell(\mathfrak{S}(n))$.

2. Fall: Die k_o-te Zeile enthält mindestens zwei von Null (und somit auch von Eins) verschiedene Elemente $a_{k_o j_o}$, $a_{k_o \ell_o} \in]o,1[$. Offenbar gilt $\lambda := a_{k_o j_o} + a_{k_o \ell_o} \in]o,1[$.

Man definiert nun die Matrizen $Q=(q_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ und $P=(p_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$.

$$q_{ij} := \begin{cases} \lambda, \text{ falls } i=k_o,\ j=j_o, \\ 0, \text{ falls } i=k_o,\ j=\ell_o. \\ a_{ij}, \text{ sonst.} \end{cases} ; \quad p_{ij} := \begin{cases} 0, \text{ falls } i=k_o,\ j=j_o. \\ \lambda, \text{ falls } i=k_o,\ j=\ell_o. \\ a_{ij}, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gehören Q und P zu $\mathfrak{S}(n)$, und es gilt:

$A = \frac{a_{k_o j_o}}{\lambda} Q + \frac{a_{k_o \ell_o}}{\lambda} P \ (\lambda := a_{k_o j_o} + a_{k_o \ell_o})$. D.h. $A \notin \ell(\mathfrak{S}(n))$.

Da in beiden Fällen $A \notin \ell(\mathfrak{S}(n))$, ist die Inklusion $\mathfrak{S}(n) \setminus \mathbf{E}(n) \subset \mathfrak{S}(n) \setminus \ell(\mathfrak{S}(n))$ vollständig bewiesen.

1.7 BEMERKUNGEN:

1. Mit der Beweismethode von 1.6 erhält man außerdem das Resultat $\ell(\mathfrak{P}(n)) = \mathbf{F}(n)$ [siehe [26], Kap. I, § 4.3].
2. Für den Fall der doppelt stochastischen Matrizen bedarf es einer kleinen Verfeinerung des Beweisverfahrens.

Um die Gleichheit $\ell(\mathfrak{D}(n)) = \mathfrak{P}(n)$ nachzuweisen, genügt es zu zeigen: $A \in \mathfrak{D}(n) \setminus \mathfrak{P}(n)$ impliziert $A \notin \ell(\mathfrak{D}(n))$; denn die umgekehrte Richtung zeigt man wie im Beweis des Satzes 1.6.

Sei also $A \in \mathfrak{D}(n) \setminus \mathfrak{P}(n)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$. O.B.d.A. kann man annehmen, daß jede Zeile und jede Spalte (mindestens) zwei von Null verschiedene Elemente enthält. (Im Falle der Existenz von ℓ Zeilen $i_1, i_2, \ldots, i_\ell$ $(1 \leq \ell \leq n-2)$,

von denen jede höchstens ein von Null verschiedenes Element enthält, also das Element 1, existieren gleichzeitig auch ℓ voneinander verschiedene Spalten $j_1, j_2, \ldots, j_\ell$, von denen wiederum jede höchstens ein von Null verschiedens Element enthält.
In diesem Falle streicht man die oben erwähnten ℓ Zeilen und ℓ Spalten und betrachtet die übrigbleibende $(n-\ell) \times (n-\ell)$ doppelt stochastische Matrix.)
Dann existiert aber in A eine strikt positive Schleife $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B} := \{ (1,j_0),(1,j_2),(i_3,j_2),(i_3,j_4),(i_5,j_4)(i_5,j_6),\ldots, (i_{(k-1)},j_{(k-2)}),(i_{(k-1)},j_0) \}$$

(k gerade und $4 \leq k \leq 2n$).

Seien $2\varepsilon := \min\{a_{ij} : (i,j) \in \mathfrak{B}\}$

und $\mathfrak{D} := \{(1,j_0),(i_3,j_2),(i_5,j_4),\ldots,(i_{(k-1)},j_{(k-2)})\}$

Man definiert nun die Matrizen $Q = (q_{ij})_{i,j = 1,2,\ldots,n}$ und $P = (p_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ durch:

$$q_{ij} := \begin{cases} a_{ij}+\varepsilon, & \text{falls } (i,j) \in \mathfrak{D} \\ a_{ij}-\varepsilon, & \text{falls } (i,j) \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{D} \\ a_{ij}, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad p_{ij} := \begin{cases} a_{ij}-\varepsilon, & \text{falls } (i,j) \in \mathfrak{D} \\ a_{ij}+\varepsilon, & \text{falls } (i,j) \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{D} \\ a_{ij}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gehören Q und P zu $\mathfrak{D}(n)$, und es gilt:
$A = \frac{1}{2} Q + \frac{1}{2} R$. D.h., $A \notin \ell(\mathfrak{D}(n))$, was den Beweis für den Fall von doppelt stochastischen Matrizen vervollständigt.
3. $\mathfrak{E}(n)$ ist eine endliche Halbgruppe der Ordnung $(n+1)^n$, denn ein Element $E \in \mathfrak{E}(n)$ besteht aus n Elementen (Zeilen), welche aus folgender Menge mit (n+1) Elementen gewählt werden können:
$\{(0,0,\ldots,0); (1,0,\ldots,0); (0,1,0,\ldots,0); \ldots; (0,0,\ldots,0,1)\}$.
Also gilt $o(\mathfrak{E}(n)) = (n+1)^n$ (= die Anzahl der n-Permutationen aus $1,2,\ldots,(n+1)$ mit Wiederholung).
Analog beweist man, daß $o(\mathfrak{F}(n)) = n^n$ ist.
Schließlich ist $\mathfrak{N}(n) = \ell(\mathfrak{D}(n))$ [vgl. [2]; [17], Kap. II, § 1.7; [26], Kap. I, § 5.2; [1], Kap. X, Theorem 11] eine Gruppe der Ordnung n!, weil bekanntlich $\mathfrak{N}(n)$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n ist.

1.8 Für die konvexe, kompakte Teilmenge
$\mathbb{S}(n) - I := \{S-I : S \in \mathbb{S}(n)\}$ von Subintensitätsmatrizen gilt $\ell(\mathbb{S}(n)-I) = \mathbb{E}(n)-I$.

$\mathbb{S}(n)-I$ ist als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n^2}$ konvex und kompakt. Da die Abbildung $f : \mathbb{S}(n) \longmapsto \mathbb{I}_{sub}(n)$, definiert durch $f(S) := S-I$ für alle $S \in \mathbb{S}(n)$, affin und stetig ist, stellt sich $\mathbb{S}(n)-I$ als konvex und kompakt heraus.

Die Bijektivität von f liefert schließlich die Behauptung.

Analog beweist man $\ell(\mathbb{P}(n)-I) = \mathbb{F}(n)-I$ und $\ell(\mathbb{D}(n)-I) = \mathbb{T}(n)-I$.

BEMERKUNG: Man sieht leicht, daß $\alpha(\mathbb{S}(n)-I)$, $\alpha(\mathbb{P}(n)-I)$ bzw. $\alpha(\mathbb{D}(n)-I)$ für alle $\alpha \geq o$ konvexe kompakte Teilmengen von $\mathbb{I}_{sub}(n)$, $\mathbb{I}(n)$ bzw. $\mathbb{I}_{st}(n)$ mit Extremalpunktmengen $\alpha(\mathbb{E}(n)-I)$, $\alpha(\mathbb{F}(n)-I)$ bzw. $\alpha(\mathbb{T}(n)-I)$ sind, sowie daß $\mathbb{I}_{sub}(n) = \bigcup\{\alpha(\mathbb{S}(n)-I) : \alpha \geq o\}$, $\mathbb{I}(n) = \bigcup\{\alpha(\mathbb{P}(n)-I) : \alpha \geq o\}$ bzw. $\mathbb{I}_{st}(n) = \bigcup\{\alpha(\mathbb{D}(n)-I) : \alpha \geq o\}$.

§ 2 DARSTELLUNG EINER ENDLICHEN HALBGRUPPE DURCH EINE TEILMENGE VON STOCHASTISCHEN MATRIZEN

2.1 DEFINITION: Jeder stetige Halbgruppen- (bzw. Algebren-) Homomorphismus einer topologischen Halbgruppe (bzw. Algebra) $\mathfrak{H}$ in den Raum $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ aller Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ heißt Darstellung von $\mathfrak{H}$ ($n \in \mathbb{N}$). Eine injektive Darstellung von $\mathfrak{H}$ wird auch treu genannt.

Der folgende Satz aus der Arbeit [13 b, §3] von S. Johansen ist wohlbekannt und wird mehrfach verwendet.
Der Vollständigkeit halber geben wir einen Beweis.

2.2 SATZ: Es sei $\mathfrak{H} := \{ s_1, s_2, \ldots, s_m \}$ ($m \in \mathbb{N}$) eine Halbgruppe mit Einselement s_1. Dann liefert die Zuordnung

$$D : s_k \longmapsto D(s_k) = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1,2,\ldots,m},$$

definiert für alle $k = 1,2,\ldots,m$ durch $a_{ij}^{(k)} :=$

$$:= \begin{cases} 1, & \text{falls } s_i s_k = s_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine treue Darstellung der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in die Menge $\mathbf{F}(m)$.

Beweis: Zunächst merken wir an, daß für festes i nur ein $j = j(i)$ existiert, derart, daß $s_i s_k = s_j$. Folglich enthält die i-te Zeile der Matrix $D(s_k)$ nur ein von Null verschiedenes Element, nämlich das in der j-ten Spalte stehende.
Da nach Definition $a_{ij(i)} = 1$ gilt, gehört $D(s_k)$ zu $\mathbf{F}(m)$ für alle $k = 1,2,\ldots,m$.

Nun ist $\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ ein m-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\varepsilon_{s_1}, \varepsilon_{s_2}, \ldots, \varepsilon_{s_m}$ und gleichzeitig eine Algebra über $\mathbb{R}$ bezüglich der Faltung.
Betrachtet man für jedes $s_k \in \mathfrak{H}$ die lineare Abbildung $f_k \in \mathfrak{L}(\mathcal{M}^1(\mathfrak{H}))$, definiert durch $\nu \longmapsto \nu * \varepsilon_{s_k}$ für alle $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$, so ist ihr bezüglich der Basis $\varepsilon_{s_1}, \varepsilon_{s_2}, \ldots, \varepsilon_{s_m}$ eindeutig die Matrix

$M(s_k) = (m_{ij}^{(k)})_{i,j=1,2,\ldots,m}$ zugeordnet.

Es gilt $m_{ij}^{(k)} = \langle M(s_k)\,\varepsilon_{s_i}, \varepsilon_{s_j}\rangle = \langle \varepsilon_{s_i} * \varepsilon_{s_k}, \varepsilon_{s_j}\rangle = \langle \varepsilon_{s_i s_k}, \varepsilon_{s_j}\rangle$

und daher $m_{ji}^{(k)} = 1$, falls $s_i s_k = s_j$, und $= 0$ sonst.

Also gilt für alle $k = 1,2,\ldots,m$: ${}^{t}M(s_k) = D(s_k)$.

Dem Element $s_i s_j = s_\ell$ wird nun die Matrix $M(s_\ell)$ zugeordnet, und wegen $M(s_\ell)(\nu) := \nu * \varepsilon_{s_\ell} = \nu * \varepsilon_{s_i s_j} =$

$= \nu * (\varepsilon_{s_i} * \varepsilon_{s_j}) = (\nu * \varepsilon_{s_i}) * \varepsilon_{s_j} = (M(s_i)(\nu)) * \varepsilon_{s_j} = M(s_j) \cdot$

$\cdot (M(s_i)(\nu))$ für alle $\nu \in \mathcal{M}^{\ell}(\mathcal{S})$ sieht man, daß $M(s_\ell) =$

$= M(s_j).M(s_i)$ ist. Somit gilt $D(s_\ell) = {}^{t}(M(s_j).M(s_i)) =$

$= D(s_i).D(s_j)$. D.h., D ist eine Darstellung von $\mathcal{S}$.

Daß D sogar treu ist, beweist man so: Aus $s_i \neq s_j$ folgt $M(s_i) \neq M(s_j)$ und daher auch $D(s_i) \neq D(s_j)$.

Es gilt $M(s_i)(\varepsilon_{s_1}) := \varepsilon_{s_1} * \varepsilon_{s_i} = \varepsilon_{s_i} \neq \varepsilon_{s_j} = \varepsilon_{s_1} * \varepsilon_{s_j} =:$

$=: M(s_j)\,\varepsilon_{s_1}$, was den Beweis des Satzes vervollständigt.

2.3 BEMERKUNG: Falls $\mathcal{S}$ kein Einselement besitzt, ist die Darstellung D des Satzes 2.2 nicht notwendigerweise treu. Man betrachte die Halbgruppe $\mathcal{S} := \{a,b,c\}$ mit der Multiplikationstabelle

	a	b	c
a	a	b	a
b	b	a	b
c	a	b	a

$\mathcal{S}$ besitzt offenbar kein Einselement, und es gilt:

$$D(a) = D(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \qquad D(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Andererseits gibt es Halbgruppen $\mathcal{S}$ ohne Einselement, für welche D treu ist.

Als Beispiel nennen wir die Halbgruppe $\mathcal{S} := \{a,b,c\}$ mit der Multiplikationstabelle

	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	c	c	c

Eine kurze Rechnung liefert:

$$D(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 DEFINITION: Sei $\mathfrak{H} := \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ eine Halbgruppe.

(α) Sei $k \in \{1,2,\ldots,m\}$. Sind alle Elemente, die in der k-ten Spalte der Multiplikationstabelle von $\mathfrak{H}$ stehen, verschieden, so möge π_k die hierdurch induzierte Permutation von $\{1,2,\ldots,m\}$ bezeichnen.

(β) Seien $k, \ell \in \{1,2,\ldots,m\}$, und es mögen π_k, π_ℓ gemäß (α) existieren. Dann heißen die Spalten k und ℓ <u>invers</u> zueinander, wenn die Hintereinanderausführung $\pi_k \circ \pi_\ell$ $(= \pi_\ell \circ \pi_k)$ die Identität ergibt.

2.5 FOLGERUNGEN:

(α) Besitzt $\mathfrak{H}$ eine Eins, dann sind die Spalten der Multiplikationstabelle von $\mathfrak{H}$ paarweise verschieden. (Sonst wäre für die Halbgruppe $\mathfrak{H}$ die Darstellung D in $\mathbb{F}(m)$ nicht treu.)

(β) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Die k-te Spalte der Multiplikationstabelle von $\mathfrak{H}$ stellt eine Permutation π der Menge $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ dar.

(ii) $D(s_k)\, e_i = e_{\pi^{-1}(i)}$ für alle $i=1,2,\ldots,m$.

[Es sei $D(s_k) = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1,2,\ldots,m}$. Folglich gilt für alle $i,j=1,2,\ldots,m$:

$$\left\langle D(s_k)e_j, e_i \right\rangle = a_{ij}^{(k)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } s_i s_k = s_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\Leftrightarrow \pi(i)=j)$$

$$\Longleftrightarrow D(s_k)\, e_i = e_{\pi^{-1}(i)} \quad \text{für alle } i=1,2,\ldots,m\,.]$$

(γ) Ist insbesondere $\mathfrak{H}$ eine Gruppe, dann gilt $D(\mathfrak{H}) \subset \prod(m)$.

(δ) Eine endliche Halbgruppe $\mathfrak{H} := \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ mit Eins s_1 ist genau dann eine Gruppe, wenn zu jeder Spalte der Multiplikationstabelle von $\mathfrak{H}$ ein Inverses existiert.

2.6 SATZ: Es seien $\mathfrak{H}$ und D wie in Satz 2.2. Dann ist die durch $D(\mu) := \sum_{i=1}^{m} \beta_i D(s_i)$ für alle $\mu \in \mathfrak{U}^{\ell}(\mathfrak{H})$, $\mu := \sum_{i=1}^{m} \beta_i \varepsilon_{s_i}$ $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R})$ definierte Abbildung D von $\mathfrak{U}^{\ell}(\mathfrak{H})$ in $\mathbb{M}(m, \mathbb{R})$ eine treue Darstellung der Algebra $\mathfrak{U}^{\ell}(\mathfrak{H})$.

Beweis: Unmittelbar aus der Definition der Abbildung $D : \mathcal{M}^L(\mathfrak{H}) \longrightarrow \mathbb{M}(m, \mathbb{R})$ erhält man: $D(\gamma\mu + \delta\nu) = \gamma D(\mu) + \delta D(\nu)$ für alle $\mu, \nu \in \mathcal{M}^L(\mathfrak{H})$ und $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Für jedes $\mu \in \mathcal{M}^L(\mathfrak{H})$, $\mu := \sum_{i=1}^{m} \beta_i \varepsilon_{s_i}$ betrachte man die lineare Abbildung $f_\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{M}^L(\mathfrak{H}))$, definiert durch $\nu \longmapsto \nu * \mu$ für alle $\nu \in \mathcal{M}^L(\mathfrak{H})$.

Wie in Satz 2.2 sieht man, daß der linearen Abbildung f_μ bezüglich der Basis $\varepsilon_{s_1}, \varepsilon_{s_2}, \ldots, \varepsilon_{s_m}$ eineindeutig die Matrix $M(\mu) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i M(s_i)$ entspricht. Also gilt für alle $\mu \in \mathcal{M}^L(\mathfrak{H})$: ${}^t M(\mu) = D(\mu)$.

Dem Element $\mu * \pi = \rho$ wird nun die Matrix $M(\rho)$ zugeordnet, und wegen $M(\rho)(\nu) := \nu * \rho = \nu * (\mu * \pi) = (\nu * \mu) * \pi = (M(\mu)(\nu)) * \pi = M(\pi)(M(\mu)(\nu))$ für alle $\nu \in \mathcal{M}^L(\mathfrak{H})$ sieht man, daß $M(\rho) = M(\pi) \cdot M(\mu)$ ist. Somit gilt $D(\rho) = {}^t(M(\pi) \cdot M(\mu)) = D(\mu) \cdot D(\pi)$.

Zu zeigen bleibt, daß aus $D(\mu) = D(\pi)$ folgt: $\mu = \pi$.
Wegen $D(\mu) = D(\pi)$ folgt aber $f_\mu = f_\pi$.
Somit gilt $\nu * \mu = \nu * \pi$ für alle $\nu \in \mathcal{M}^L(\mathfrak{H})$ und insbesondere $\varepsilon_{s_1} * \mu = \varepsilon_{s_1} * \pi$, also $\mu = \pi$, was die Injektivität der Abbildung D nachweist.

2.7 FOLGERUNGEN:

(α) Für eine endliche Halbgruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ gilt stets $D(\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})) \subset \mathbb{P}(m)$.

(β) Stellt jede Spalte der Multiplikationstabelle einer endlichen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ eine Permutation der Menge ihrer Elemente dar, so gilt $D(\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})) \subset \mathbb{D}(m)$.

(γ) Insbesondere gilt also die Inklusion aus (β), wenn $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe ist.

II. WAHRSCHEINLICHKEITSMAßE AUF HALBGRUPPEN

§ 1 EIGENSCHAFTEN ABSTRAKTER BZW. TOPOLOGISCHER HALBGRUPPEN

1.1 $\mathfrak{H}$ sei eine abstrakte Halbgruppe.

Eine nicht-leere Teilmenge L bzw. R von $\mathfrak{H}$ heißt bekanntlich Linksideal bzw. Rechtsideal, wenn $\mathfrak{H}L \subset L$ bzw. $R\mathfrak{H} \subset R$ gilt.
Eine nicht-leere Teilmenge T von $\mathfrak{H}$, die zugleich Links- und Rechtsideal von $\mathfrak{H}$ ist, wird zweiseitiges Ideal der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ genannt.

Ferner definiert man den Kern $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ als den Durchschnitt aller zweiseitigen Ideale der Halbgruppe $\mathfrak{H}$. Der Fall $\mathfrak{K} = \emptyset$ ist also nicht ausgeschlossen.
Aus der Definition folgt unmittelbar : Ist $\mathfrak{K} \neq \emptyset$, dann ist $\mathfrak{K}$ das eindeutig bestimmte minimale zweitige Ideal von $\mathfrak{H}$.

1.2 Ein Element $e \in \mathfrak{H}$ mit $e^2 = e$ wird fortan als Idempotent bezeichnet.
Die Menge $\mathfrak{J}$ aller Idempotenten in $\mathfrak{H}$ versehen wir mit folgender partieller Ordnungsrelation " $\leq$ " :
Für $e, f \in \mathfrak{J}$ ist

$$e \leq f \;:\Longleftrightarrow\; e = ef = fe .$$

Es ist klar, daß im Falle einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Nullelement o gilt : $o \leq s$ für alle $s \in \mathfrak{H}$.

1.3 Ein Element $e \in \mathfrak{J}$ heißt primitives Idempotent, wenn gilt : $f \in \mathfrak{J}$ und $f \leq e$ impliziert $f = e$.
Aus der Definition folgt unmittelbar : Im Falle einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Nullelement o ist o das einzige primitive Idempotent in $\mathfrak{H}$.

1.4 BEMERKUNG : In der Literatur sind die primitiven Idempotenten einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ auf verschiedene Arten definiert.
[vgl. [12], Kap. A, §1.1.8 ; [7], Kap. II, §2.7 und [16], S. 828.]

Wir haben uns der Definition von [12] bzw. der äquivalenten Definitionen von [28, §3] und [15a, S.262] angeschlossen.

1.5 Nun wird ein Element $e \in \mathfrak{J}$ maximales Idempotent genannt, wenn gilt: $f \in \mathfrak{J}$ und $e \leq f$ impliziert $f = e$.

Es sei angemerkt, daß Halbgruppen $\mathfrak{J}$ existieren, derart, daß jedes $s \in \mathfrak{J}$ ein primitives (und daher auch ein maximales) Idempotent ist.
Dies trifft zum Beispiel auf diejenige Halbgruppe $\mathfrak{J}$ zu, welche mindestens zwei Elemente enthält und für welche die Multiplikation in $\mathfrak{J}$ durch $a\beta := a$ für alle $a, \beta \in \mathfrak{J}$ definiert ist.

1.6 Eine Halbgruppe $\mathfrak{J}$ wird bekanntlich einfach genannt, wenn sie kein echtes zweiseitiges Ideal enthält.
Eine einfache Halbgruppe $\mathfrak{J}$ heißt vollständig einfach, wenn sie ein primitives Idempotent enthält.

Es ist klar, daß eine Halbgruppe $\mathfrak{J}$ mit Nullelement o, $\mathfrak{J} \neq \{o\}$, nie einfach sein kann, denn $\{o\}$ ist ein echtes Ideal von $\mathfrak{J}$.

1.7 BEMERKUNG: Im Falle einer kompakten und erst recht einer endlichen Halbgruppe - ein Fall, der uns im Verlauf der vorliegenden Arbeit ausschließlich interessiert - stimmen die oben erwähnten Definitionen von § 1.6 überein.

1.8 Bekanntlich gilt folgende Charakterisierung der einfachen Halbgruppen: Eine Halbgruppe $\mathfrak{J}$ ist genau dann einfach, wenn für alle $a \in \mathfrak{J}$ $\mathfrak{J}a\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$ gilt.

1.9 Darüber hinaus ist auch bekannt, daß jede vollständig einfache Halbgruppe $\mathfrak{J}$ als eine Rees-Halbgruppe auf einer geeigneten Gruppe G bzgl. einer ebenfalls geeigneten Matrix M_r dargestellt werden kann, oder einfacher, daß $\mathfrak{J}$ eine Rees-Darstellung bzgl. einer Gruppe G besitzt:
Es sei G eine Gruppe; weiterhin seien A,B zwei Indexmengen. $\mathfrak{R}$ bezeichne nun die Menge aller Abbildungen
$r : (\alpha,\beta) \longmapsto g_{\alpha\beta}$ von AxB in G.
Jedem $r \in \mathfrak{R}$ kann man die Matrix $M_r = (g_{\alpha\beta})_{\alpha \in A, \beta \in B}$ zuordnen und umgekehrt. Weiter kann man folgende r-Multiplikation auf GxAxB erklären:
$(g_1,\alpha,\beta).(g_2,\gamma,\delta) := (g_1 g_{\beta\gamma} g_2, \alpha, \delta) \left((g_1,\alpha,\beta),(g_2,\gamma,\delta) \in GxAxB\right)$.

$G \times A \times B$ bekommt dann die Struktur einer Halbgruppe und diese heißt die Rees-Halbgruppe auf der Gruppe G bzgl. der Matrix M_r [vgl. [7], Kap. III, § 2].

1.10 Im folgenden sei $\mathfrak{H}$ eine kompakte Halbgruppe.

Grundlagen der Theorie kompakter Halbgruppen entnehme der Leser dem Buch [12] von K.H. Hofmann und P.S. Mostert. Wir sammeln einige im weiteren verwendete Fakten über kompakte Halbgruppen $\mathfrak{H}$.

1. $\mathfrak{H}$ besitzt ein minimales zweiseitiges Ideal $M(\mathfrak{H})$, welches zudem abgeschlossen ist. [[12], Kap. A, § 1.1.12].
2. $\mathfrak{H}$ enthält mindestens ein Idempotent. [[12], Kap. A, § 1.1.16].
3. Das eindeutig bestimmte minimale Ideal $M(\mathfrak{H})$ enthält ein (in $\mathfrak{H}$) primitives Idempotent. [[12], Kap. A, § 1.1.22].
4. Jedes Idempotent in $M(\mathfrak{H})$ ist primitiv in $\mathfrak{H}$, und für jedes primitive Idempotent π in $\mathfrak{H}$ ist $\pi\mathfrak{H}\pi (= \pi M(\mathfrak{H})\pi)$ eine Gruppe [Idem].

1.11 Für $s \in \mathfrak{H}$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\Gamma(s,n)$ die abgeschlossene Hülle der Menge $\{ s^k \in \mathfrak{H} : k \geq n \}$ in $\mathfrak{H}$.
$\Gamma(s) := \Gamma(s,1)$ ist offenbar die kleinste abgeschlossene (und daher kompakte) Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, welche s enthält; darüber hinaus ist diese kommutativ. Weiter enthält sie wegen [12], Kap. A, § 1.1.17 ein eindeutig bestimmtes Idempotent $e (= e^2) \in \mathfrak{H}$.
Nun ist die Familie $(\Gamma(s,n))_{n \geq 1}$ eine absteigend filtrierende Familie von kompakten Mengen, und somit besitzt sie die endliche Durchschnittseigenschaft.
Folglich ist der Durchschnitt $G := \bigcap \{ \Gamma(s,n) : n \geq 1 \}$ nicht leer.
Andererseits ist jedes $\Gamma(s,n)$, $n=1,2,\ldots$, eine abgeschlossene, kommutative Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$ und daher ihr Durchschnitt ebenfalls.
K. Numakura hat gezeigt, daß G eine kompakte, kommutative Gruppe ist [siehe [21], § 4, Lemma 3]. Folglich ist das eindeutig bestimmte Idempotent $e (= e^2)$ von $\Gamma(s)$ die Eins von G. Daher existiert für jedes Idempotent $e (= e^2) \in \mathfrak{H}$ eine eindeutig

bestimmte maximale (und somit abgeschlossene) Gruppe $\mathcal{G}(e)$ mit Eins e in $\mathcal{J}$.

Die obigen Eigenschaften einer kompakten Halbgruppe $\mathcal{J}$ lassen folgende zwei Definitionen zu:

(α) Das Element $s \in \mathcal{J}$ gehört zum Idempotent $e(= e^2) \in \mathcal{J}$, wenn e das eindeutig bestimmte Idempotent von $\Gamma(s)$ ist.

(β) $s \in \mathcal{J}$ heißt regulär, wenn $s \in \bigcup \{\mathcal{G}(e) : e \in \mathcal{J} \text{ mit } e=e^2\}$.

1.12 Für eine kompakte Halbgruppe $\mathcal{J}$ ist bekannt, daß der Kern $\mathcal{K}$ von $\mathcal{J}$ existiert [siehe [21], § 5, Theorem 2]. Ferner ist $\mathcal{K}$ die Vereinigung aller minimalen Links- (oder Rechts-) Ideale von $\mathcal{J}$ [siehe [21], § 6, Theorem 6]; weiter stellt $\mathcal{K}$ die disjunkte Vereinigung von abgeschlossenen, sogar maximalen, paarweise isomorphen Gruppen $\mathcal{H}_{ij} = e_i \mathcal{K} e_j$ in $\mathcal{J}$ dar, wobei die e_i und e_j gewisse Idempotente von $\mathcal{K}$ durchlaufen [siehe [21], § 6, Theorem 3 und Theorem 7 sowie [28], §1.3].

1.13 Seien nun $\mathcal{P}$ eine einfache Unterhalbgruppe der kompakten Halbgruppe $\mathcal{J}$ und $\mathcal{K}$ der stets existierende Kern von $\mathcal{J}$. Dann gilt: Entweder $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$ oder $\mathcal{P} \cap \mathcal{K} = \emptyset$.
[Sei $p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{K}$. Da $\mathcal{P}$ einfach ist, gilt nach § 1.8 $\mathcal{P}a\mathcal{P} = \mathcal{P}$ für alle $a \in \mathcal{P}$. Also $\mathcal{P} = \mathcal{P}p\mathcal{P} \subset \mathcal{P}\mathcal{K}\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$.]

1.14 Aus 1.12 folgt: Jede einfache, endliche Halbgruppe $\mathcal{J}$ kann als disjunkte Vereinigung von paarweise isomorphen Gruppen $\mathcal{G}_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,r$, $j = 1,2,\ldots,s$ $(r,s \in \mathbb{N})$

$(\mathcal{J} = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} \mathcal{G}_{ij})$ dargestellt werden.

Es bezeichne $\xi := o(\mathcal{G}_{ij})$, $i = 1,2,\ldots,r$, $j = 1,2,\ldots,s$. Ferner sei $g_\alpha^{(ij)}$ ein Element der Gruppe $\mathcal{G}_{ij}$, $i=1,2,\ldots,r$, $j=1,2,\ldots,s$ $(1 \leq \alpha \leq \xi)$; insbesondere sei $e^{(ij)} := g_1^{(ij)}$ das Einselement von $\mathcal{G}_{ij}$.

Dann gilt für alle $i,k = 1,2, \ldots ,r$, $j,l = 1,2, \ldots ,s$ und $\quad = 1,2, \ldots ,\xi$:

(i) $$\mathcal{G}_{ij}\, g^{(kl)} = \mathcal{G}_{il}$$

(ii) $$g^{(kl)}\, \mathcal{G}_{ij} = \mathcal{G}_{kj}$$

(iii) $$e^{(ij)}\, e^{(kj)} = e^{(ij)}$$

(iv) $$e^{(ij)}\, e^{(il)} = e^{(il)}$$

[siehe [28], § 1.4].

§ 2. EXPONENTIAL- UND POISSONMAß AUF EINER ENDLICHEN HALBGRUPPE

Zwei tiefliegende Sätze werden für den Aufbau der vorliegenden Arbeit ausgewertet. Sie wurden der klassischen Arbeit [18] von P. Martin-Löf entnommen; der erste charakterisiert ein idempotentes Wahrscheinlichkeitsmaß μ ($=\mu^2$) auf einer diskreten Halbgruppe $\mathfrak{H}$, der zweite beschreibt die Struktur einer Gruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathfrak{H}$.

Im folgenden seien $\mathfrak{H}$ eine diskrete (nicht notwendig endliche) Halbgruppe, $\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})$ mit $\mu = \mu^2$.

2.1 SATZ: Der Träger von μ ist isomorph zu einer Rees-Halbgruppe G x A x B, wobei G eine endliche Gruppe ist und A, B höchstens abzählbare Indexmengen sind. Darüber hinaus ist μ von der Gestalt $\mu \cong \omega_G \otimes \xi \otimes \zeta$ (wobei ω_G das normierte Haarsche Maß auf G und ξ bzw. ζ feste Wahrscheinlichkeitsmaße auf A bzw. auf B sind) und umgekehrt.

Für den Beweis des Satzes siehe [18], insbesondere die Umformulierung des Satzes 6.1 auf Seite 91.

2.2 SATZ: Sei $\Gamma \subset \mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})$ eine Gruppe mit Einselement $\mu(=\mu^2) \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})$, dann gilt:

(i) $\operatorname{supp}(\Gamma) := \bigcup \{\operatorname{supp}(\nu) : \nu \in \Gamma\}$ ist eine vollständig einfache Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, und daher besitzt sie die Rees-Darstellung $\operatorname{supp}(\Gamma) \cong G \times A \times B$ für eine geeignete Gruppe G und geeignete Indexmengen A, B.

(ii) $\operatorname{supp}(\mu)$ ist eine vollständig einfache Unterhalbgruppe von $\operatorname{supp}(\Gamma)$ mit $\operatorname{supp}(\mu) \cong N \times A \times B$ für einen geeigneten endlichen Normalteiler der Gruppe G.

(iii) Jedes $\nu \in \Gamma$ ist von der Gestalt $\nu \cong \omega \otimes \xi \otimes \zeta$, wobei ω das Translat eines normierten Haarschen Maßes auf N ($\omega = \varepsilon_g * \omega_N$; $g \in G$) und ξ bzw. ζ ein festes Wahrscheinlichkeitsmaß auf A bzw. auf B ist.

Für den Beweis des Satzes siehe [18], § 7.1.

2.3 BEMERKUNG: Der Satz 2.1 bzw. die Aussage (ii) des Satzes 2.2 ist eine Verallgemeinerung des von B.M. Kloss für kompakte Halbgruppen erzielten Resultats auf den Fall diskreter Halbgruppen [vgl. 15a, § 6.3.1, Theorem 14].

2.4 Im folgenden bezeichne $\mathfrak{H}$ stets eine endliche Halbgruppe. Für ein festes $\varepsilon \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ mit $\varepsilon = \varepsilon^2$ seien

$$\mathcal{R}_\varepsilon := \varepsilon\, \mathcal{M}^b(\mathfrak{H})\, \varepsilon \quad \left[= \{\mu \in \mathcal{M}^b(\mathfrak{H}) : \mu = \mu\varepsilon = \varepsilon\mu\}\right]$$

$$\mathcal{Z}_\varepsilon := \varepsilon\, \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\, \varepsilon \quad \left[= \mathcal{R}_\varepsilon \cap \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\right]$$

$$\mathcal{T}_\varepsilon := \{\mu \in \mathcal{R}_\varepsilon : \|\varepsilon - \mu\| < 1\}.$$

Bekanntlich sind die Funktionen

(1) $\mu \longmapsto \exp_\varepsilon(\mu) := \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\mu^k$ von $\mathcal{R}_\varepsilon$ in $\mathcal{M}^b(\mathfrak{H})$

(2) $\mu \longmapsto \ln_\varepsilon(\mu) := -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(\varepsilon-\mu)^k$ von $\mathcal{T}_\varepsilon$ in $\mathcal{M}^b(\mathfrak{H})$

wohldefiniert. Die erste heißt ε-Exponentialfunktion, die zweite ε-Logarithmusfunktion.

2.5 ELEMENTARE EIGENSCHAFTEN:

1. Für alle $\mu \in \mathcal{T}_\varepsilon$ gilt $\exp_\varepsilon(\ln_\varepsilon \mu) = \mu$.
2. Für alle $\mu \in \mathcal{M}^b(\mathfrak{H})$ mit $\|\mu\| < \ln 2$ gilt $\ln_\varepsilon(\exp_\varepsilon \mu) = \mu$, sowie $\|\varepsilon - \exp_\varepsilon \mu\| < 1$
3. Für alle $\mu, \nu \in \mathcal{R}_\varepsilon$ mit $\mu\nu = \nu\mu$ gilt $\exp_\varepsilon(\mu+\nu) = \exp_\varepsilon(\mu)\cdot\exp_\varepsilon(\nu)$.
4. Für alle $\mu, \nu \in \mathcal{R}_\varepsilon$ mit $\mu\nu = \nu\mu$ und $\|\varepsilon-\mu\| + \|\varepsilon-\nu\| + \|\varepsilon-\mu\|\cdot\|\varepsilon-\nu\| < 1$ gilt $\|\varepsilon - \mu\nu\| < 1$, sowie $\ln_\varepsilon(\mu\nu) = \ln_\varepsilon(\mu) + \ln_\varepsilon(\nu)$.

Die Beweise von 1. bis 4. kann man aus [3ß], § 3, Hilfssatz 1 wörtlich für Maße auf einer endlichen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ übertragen. In [3ß] wurden Maße auf lokalkompakten Gruppen $\mathfrak{G}$ betrachtet; in diesem Fall sind die Idempotenten ε normierte Haar-Maße auf kompakten Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

2.6 SATZ: Seien $\mu \in \mathcal{Z}_\varepsilon$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\|\mu^n - \varepsilon\| + 2\|\mu - \varepsilon\| < 1$.
Dann gilt für alle $k = 1,2,\ldots,n$:
(i) $\|\mu^k - \varepsilon\| + 2\|\mu - \varepsilon\| < 1$ und
(ii) $\ln_\varepsilon(\mu^k) = k \cdot \ln_\varepsilon(\mu)$.

Den Beweis kann man wie in [3b], § 3, Hilfssatz 2 durchführen.

2.7 SATZ: Sei $\mu \in \mathcal{Z}_\varepsilon$. Dann gelten:
(i) $\exp_\varepsilon[\alpha(\mu-\varepsilon)] = e^{-\alpha}(\exp_\varepsilon(\alpha\mu))$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
(ii) $\exp_\varepsilon[\alpha(\mu-\varepsilon)] \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{z})$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$
(iii) $\exp_\varepsilon[\alpha(\mu-\varepsilon)] \notin \mathcal{M}^1(\mathfrak{z})$ für $\mu \neq \varepsilon$ und $\alpha \in \left]-\frac{\ln 2}{2\|\varepsilon-\mu\|}, 0\right[$

Beweis: (i) und (ii) klar!
(iii) Sei $\pi := \exp_\varepsilon \alpha(\mu-\varepsilon)$ für ein $\alpha \in \left]-\frac{\ln 2}{2\|\varepsilon-\mu\|}, 0\right[$ und $\mu \in \mathcal{Z}_\varepsilon$, $\mu \neq \varepsilon$.

Dann gehört $\nu := \exp_\varepsilon[-\alpha(\mu-\varepsilon)]$ wegen (ii) zu $\mathcal{M}^1(\mathfrak{z})$.
Angenommen $\pi \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{z})$, dann gilt $\pi^n \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{z})$ für alle $n = 1,2,\ldots$ Andererseits gilt $\pi\nu = \varepsilon\pi = \pi\varepsilon$ und wegen § 2.5 (3) $\pi\nu = \nu\pi = \varepsilon$.
Wir zeigen nun $\pi \neq \varepsilon$, sowie $\pi \neq \nu$:
Ist $\pi = \varepsilon$, dann folgt aus der speziellen Wahl von α
$\|\alpha(\mu-\varepsilon)\| = (-\alpha)\|\mu-\varepsilon\| < \frac{\ln 2}{2\|\mu-\varepsilon\|}\|\mu-\varepsilon\| < \ln 2$ und daher wegen § 2.5 (2) $\alpha(\mu-\varepsilon) = \ln_\varepsilon(\pi) = \ln_\varepsilon(\varepsilon) = 0$ im Widerspruch zu $\alpha \neq 0$ und $\mu \neq \varepsilon$.
Ist $\pi = \nu$, dann gilt $\pi^2 = \varepsilon$.
Nun gilt wegen § 2.5 (3) $\pi^2 = \exp_\varepsilon[2\alpha(\mu-\varepsilon)]$
Wiederum folgt aus der speziellen Wahl von α
$\|2\alpha(\mu-\varepsilon)\| = 2(-\alpha)\|\mu-\varepsilon\| < 2\frac{\ln 2}{2\|\mu-\varepsilon\|}\|\mu-\varepsilon\| = \ln 2$
und daher wegen § 2.5 (2) $2\alpha(\mu-\varepsilon) = \ln_\varepsilon(\pi^2) = \ln_\varepsilon(\varepsilon) = 0$ ebenfalls im Widerspruch zu $\alpha \neq 0$ und $\mu \neq \varepsilon$.

Man betrachtet nun die von $\{\varepsilon, \pi, \nu\}$ erzeugte Gruppe Γ in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{z})$. Wegen Satz 2.2 gilt $\operatorname{supp}(\Gamma) = G \times A \times B$, $\varepsilon \cong \omega_N \otimes \xi \otimes \zeta$, $\pi \cong (\varepsilon_{g_1} * \omega_N) \otimes \xi \otimes \zeta$ und $\nu \cong (\varepsilon_{g_2} * \omega_N) \otimes \xi \otimes \zeta$ $(g_1, g_2 \in G)$.

Da $\pi \neq \nu$ ist, folgt $g_1 N \neq g_2 N$, und somit ist $\mathrm{supp}(\pi) \neq \mathrm{supp}(\nu)$, was im Widerspruch zur Definition der Maße π und ν steht.

2.8 Sind $\mathfrak{k}(=\mathfrak{k}^2) \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{I})$, $\nu \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{k}}$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$, dann heißt bekanntlich das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{I}$
$\mu := \exp_{\mathfrak{k}}\left[\alpha(\nu - \mathfrak{k})\right]$ ein <u>$\mathfrak{k}$-Poissonmaß</u>.

III. EXTREMALENDLICHE HALBGRUPPEN

§ 1. DEFINITION UND ERSTE EIGENSCHAFTEN

1.1 DEFINITION: Eine kompakte, konvexe Halbgruppe $\mathfrak{T}$ mit Einselement S in $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) heißt extremalendlich, falls die von der Extremalpunktmenge $\mathfrak{k}(\mathfrak{T})$ erzeugte Halbgruppe $\mathfrak{G} := \langle \mathfrak{k}(\mathfrak{T}) \rangle$ endlich ist.

Im folgenden bezeichne $\mathfrak{T}$ stets eine extremalendliche Halbgruppe (kürzer: E-Halbgruppe), $\mathfrak{k}(\mathfrak{T})$ die Extremalpunktmenge von $\mathfrak{T}$, und $\mathfrak{G}$ die von $\mathfrak{k}(\mathfrak{T})$ erzeugte endliche Halbgruppe.
Ferner sei stets S das Einselement von $\mathfrak{T}$, und es werde mit m immer die Ordnung von $\mathfrak{G}$ bezeichnet ($m := o(\mathfrak{G})$).

1.2 BEISPIELE:

E- HALBGRUPPEN $\mathfrak{T}$ MIT $\mathfrak{k}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{G}$:

(α) Die Halbgruppe $\mathbb{S}(n)$ aller substochastischen Matrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

(β) Die Halbgruppe $\mathbb{P}(n)$ aller stochastischen Matrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

(γ) Die Halbgruppe $\mathbb{D}(n)$ aller doppelt-stochastischen Matrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. [vgl. I, § 1.6 und 1.7 ff.]

(δ) Die Halbgruppe $\mathbb{W}(n)$ bestehend aus der konvexen Hülle aller n-ten Einheitswurzeln.
Ein Punkt $z \in \mathbb{W}(n)$ ($z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$) kann durch die Matrix $M(z) := \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(2,\mathbb{R})$ dargestellt werden.

(ε) Die Halbgruppe $\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$, wobei $\mathfrak{H}$ eine endliche Halbgruppe mit Einselement (und $o(\mathfrak{H}) = m \in \mathbb{N}$) ist.
[Bekanntlich gilt $\mathfrak{k}(\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})) = \{\varepsilon_s : s \in \mathfrak{H}\}$, und ein Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ kann gemäß Kap. I, § 2.7 (α) durch die Matrix $D(\mu) \in \mathbb{P}(m)$ dargestellt werden.]

E-HALBGRUPPEN $\mathfrak{T}$ MIT $\mathfrak{k}(\mathfrak{T}) \neq \mathfrak{G}$:

Es seien $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $\mathfrak{H} := \{I, A, -A, 0\}$.
$\mathfrak{H}$ ist offenbar eine endliche Halbgruppe mit Eins I.
Es bezeichne nun $\mathfrak{T}$ die (abgeschlossene) konvexe Hülle von $\mathfrak{H}$.

Es gilt:

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta-\gamma \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} : \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}_+ \text{ und } \alpha+\beta+\gamma \leq 1 \right\}$$

$\mathcal{T}$ ist offenbar eine Halbgruppe mit Eins I.
Ferner ist $\mathcal{T}$ konvex sowie kompakt (als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des Raumes $\mathbb{R}^{2^2}$).
Eine einfache Rechnung zeigt, daß $\mathcal{E}(\mathcal{T}) = \{I, A, -A\} \neq \mathcal{G} (= \mathcal{J})$.

1.3 Beispiel einer kompakten, konvexen Halbgruppe $\mathcal{H}$ mit endlicher Extremalpunktmenge $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ und abzählbar unendlicher von $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ erzeugter Halbgruppe $\mathcal{G}$.

Es sei $\mathcal{H} := \left\{ A \in \mathbb{P}(2) : \left[\frac{1}{2},1\right] A = \left[\frac{1}{2},1\right] \right\} =$

$$= \left\{ A(\alpha) := \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \frac{1-\alpha}{2} & \frac{1+\alpha}{2} \end{bmatrix} : \alpha \in [0,1] \right\}.$$

$\mathcal{H}$ ist offenbar eine Halbgruppe mit Eins I.
Ferner ist $\mathcal{H}$ konvex und kompakt:
Da die Abbildung $\alpha \longmapsto A(\alpha)$ von $[0,1]$ in $\mathbb{P}(2)$ affin und stetig ist, stellt sich $\mathcal{H}$ als konvex und kompakt heraus.
Die Bijektivität dieser Abbildung liefert schließlich

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{I, P\}, \text{ wobei } P := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ ist.}$$

Wir zeigen nun $P^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k-1} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{k} \end{bmatrix}$

für alle $k = 1,2,\ldots$

Sei $P^k = \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{bmatrix}$ $(k=1,2,\ldots)$. Es folgt $P^{k+1} = P.P^k =$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_k & \delta_k \\ \frac{\alpha_k+\gamma_k}{2} & \frac{\beta_k+\delta_k}{2} \end{bmatrix}$$

und somit $\alpha_{k+1} = \gamma_k$

$\beta_{k+1} = \delta_k$

$$2\,\gamma_{k+1} \quad (=\alpha_k+\gamma_k) = \gamma_{k-1} + \gamma_k$$

$$2\,\delta_{k+1} \quad (=\beta_k+\gamma_k) = \delta_{k-1} + \delta_k \quad (k = 2,3,\ldots).$$

Man definiert $\Delta\gamma_k := \gamma_{k+1} - \gamma_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ und erhält daher

$$\Delta^2\gamma_k \; (:= \Delta\gamma_{k+1} - \Delta\gamma_k) = \gamma_{k+2} - 2\,\gamma_{k+1} + \gamma_k.$$

Somit erhält man die Differenzengleichung

$$2\;\Delta^2\gamma_k + 3\,\Delta\gamma_k = 0,$$

deren charakteristische Gleichung $2x^2 + 3x = 0$ die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{3}{2}$ besitzt.
Bekanntlich ist dann $\gamma_k = c_1\,(0+1)^k + c_2\,(-\frac{3}{2}+1)^k$ für alle $k = 1,2,\ldots.$ Dabei sind c_i $(i=1,2)$ zwei reelle Koeffizienten, welche aus den Anfangsbedingungen $\gamma_1 = 1/2$ und $\gamma_2 = 1/4$ bestimmt werden können.
Man bekommt also $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = -\frac{1}{3}$, somit $\gamma_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,(-\frac{1}{2})^k$ und analog $\delta_k = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,(-\frac{1}{2})^k$ für alle $k = 1,2,\ldots$.

Folglich erzeugen die zwei Extremalpunkte I und P der konvexen kompakten Halbgruppe $\mathcal{H}$ die abzählbar unendliche Halbgruppe

$$\mathcal{G} = \{I\} \cup \{P^k : k \in \mathbb{N}\}\ .$$

1.4 SATZ: Das Einselement S einer E-Halbgruppe $\mathcal{T}$ gehört stets zu $\mathcal{L}(\mathcal{T})$.

Beweis: Wäre $S \notin \mathcal{L}(\mathcal{T})$, dann ist $S = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i S_i$ für gewisse $\lambda_i \in\,]0,1[$ mit $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1$ und $S_i \in \mathcal{L}(\mathcal{T})$ für alle $i = 1,2,\ldots,l$ $(l \geq 2)$. O.B.d.A. kann man annehmen, daß $S_i \neq S_j$ für $i \neq j$ $(1 \leq i,j \leq l)$ gilt.
Sei $k \in \{1,2,\ldots,l\}$. Aus $S_k = S_k S = S\,S_k$ erhält man $S_k = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i\, S_k S_i = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i S_i S_k$. Wegen I, § 1.5

folgt nun $S_k = S_k S_i = S_i S_k$ für alle $i=1,2,\dots,\ell$. Sind $r,t \in \{1,2,\dots,\ell\}$, dann gilt also für alle $i \in \{1,2,\dots,\ell\}$ $S_r = S_r S_i$ und $S_t = S_i S_t$. Insbesondere also $S_r = S_r S_t = S_t$, d.h., die S_i $(i=1,2,\dots,\ell)$ sind untereinander gleich, was einen Widerspruch erbringt. Also $S \in \ell(\mathfrak{T})$.

1.5 SATZ: Das Bild einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{M}(k,K)$ unter einem stetigen (affinen) Homomorphismus $f(: \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{M}(k,K))$ ist wieder eine E-Halbgruppe.

Beweis: $\mathfrak{R} := f(\mathfrak{T})$ ist offenbar eine konvexe, kompakte Halbgruppe mit Einselement $f(S)$.

Wir werden $\ell(\mathfrak{R}) \subset f(\ell(\mathfrak{T}))$ nachweisen. Sei also $P \in \ell(\mathfrak{R})$. Sei $Q \in f^{-1}(P)$. Dann existieren $\ell \in \mathbb{N}$, $S_1, S_2, \dots, S_\ell \in \ell(\mathfrak{T})$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell \in]0,1]$ mit $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1$ und $Q = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i S_i$.

Ist $\ell=1$, so ist $P = f(Q) = f(S_1)$, also $P \in f(\ell(\mathfrak{T}))$.

Ist $\ell > 1$, so ist $P = f(Q) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(S_i)$.

Da P Extremalpunkt in $\mathfrak{R}$ ist, folgt wegen I, § 1.5: $P = f(S_i)$ für alle $i \in \{1,2,\dots,\ell\}$. D.h., $P \in f(\ell(\mathfrak{T}))$.

Die Endlichkeit der von $\ell(\mathfrak{R})$ erzeugten Halbgruppe folgt aus den Inklusionen $\ell(\mathfrak{R}) \subset f(\ell(\mathfrak{T})) \subset f(\mathfrak{G})$, da $f(\mathfrak{G})$ endlich ist.

1.6 SATZ: Sei $\mathfrak{T}$ eine E-Halbgruppe und sei $B \in \mathfrak{T}$ mit $B = B^2$. Dann ist $\mathfrak{R} := B\mathfrak{T}B$ eine konvexe, kompakte Halbgruppe mit Einselement B und Extremalpunktmenge $\ell(\mathfrak{R}) \subset B\,\ell(\mathfrak{T})\,B$. Ist zudem $B \in \mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{T}$ kommutativ, dann bildet $\mathfrak{R}$ eine E-Halbgruppe.

Beweis: Die Abbildung $f : \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{R}$, definiert durch

$f(P) := BPB$ für alle $P \in \mathfrak{T}$, ist surjektiv, affin und stetig. Somit stellt sich die Menge $\mathfrak{R} = f(\mathfrak{T})$ als konvex und kompakt heraus. Da nun für alle $P,Q \in \mathfrak{T}$ $(BPB)(BQB) = B(PBQ)B$ zu $\mathfrak{R}$ gehört, bildet $\mathfrak{R}$ eine Halbgruppe mit Einselement B.

Es sei hervorgehoben, daß f im allgemeinen kein Halbgruppen-Homomorphismus ist. Jedoch läßt sich wie in Satz 1.5 zeigen : $\mathfrak{k}(\mathfrak{R}) \subset f(\mathfrak{k}(\mathfrak{T})) = B\,\mathfrak{k}(\mathfrak{T})\,B \subset B\mathfrak{G}B$.

Ist zudem $B \in \mathfrak{G}$, dann folgt aus den Inklusionen $\langle \mathfrak{k}(\mathfrak{R}) \rangle \subset B\mathfrak{G}B \subset \langle \mathfrak{G} \rangle = \mathfrak{G}$ die Endlichkeit der von $\mathfrak{k}(\mathfrak{R})$ erzeugten Halbgruppe. Somit ist $\mathfrak{R}$ eine E-Halbgruppe.

Ist nun $\mathfrak{T}$ kommutativ, so gilt $\mathfrak{k}(\mathfrak{R}) \subset B\mathfrak{G}B$: Sei $\mathfrak{k}(\mathfrak{T}) = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ für alle $i = 1,2,\ldots,n$.
Nun ist $P \in \langle \mathfrak{k}(\mathfrak{R}) \rangle$ von der Gestalt $P = \prod_{i=1}^{n} (BS_{k_i}B)^{\beta_i}$, wobei $k_i \in \{1,2,\ldots,k\}$ und $(BAB)^0 := B$ für alle $A \in \mathfrak{T}$ sind.
Wegen der Kommutativität von $\mathfrak{T}$ gilt $P = B \left(\prod_{i=1}^{n} S_{k_i}^{\beta_i} \right) B$, also $P \in B\mathfrak{G}B$.
Da $B\mathfrak{G}B$ endlich ist, bildet $\mathfrak{R}$ wiederum eine E-Halbgruppe.

1.7 BEMERKUNG : Im allgemeinen bildet die konvexe, kompakte Halbgruppe $\mathfrak{R} := B\mathfrak{T}B$ keine E-Halbgruppe, obgleich sie stets eine endliche Extremalpunktmenge $\mathfrak{k}(\mathfrak{R})$ $(\subset B\mathfrak{k}(\mathfrak{T})B)$ besitzt.

Hierzu betrachte man die endliche Gruppe $\mathfrak{G} := \{e, h, l, q, u, w\}$, deren Elemente wie in Beispiel 4.7 (2) definiert sind [vgl. Kap. I, §2.5 (δ)].
Offenbar ist $\mathfrak{T} := \mathfrak{k}(\mathfrak{G})$ eine E-Halbgruppe mit Extremalpuktmenge $\mathfrak{k}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{G}$.
Seien nun $B := \frac{1}{2}(e+h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ und $P := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Es gilt $B^2 = B \in \mathfrak{T}$ sowie $B\,e\,B = B\,h\,B = B$ und $B\,l\,B = B\,q\,B = B\,u\,B = B\,w\,B = P$.

Daraus folgt : Die Extremalpunkte von $\mathfrak{R}$ sind B und P. $\mathfrak{R}$ bildet aber <u>keine</u> E-Halbgruppe :

Es gilt $P^k := (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1,2,3}$ mit $a_{11}^{(k)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^k$,

$a_{12}^{(k)} = a_{13}^{(k)} = a_{21}^{(k)} = a_{31}^{(k)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k$ und

$a_{22}^{(k)} = a_{23}^{(k)} = a_{32}^{(k)} = a_{33}^{(k)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^k$ für alle

$k = 1,2, \ldots$. (Den Beweis führt man wie in Beispiel 1.3). Somit erzeugen (das Einselement von $\mathfrak{R}$) B und P die abzählbar unendliche Halbgruppe $\langle \mathfrak{k}(\mathfrak{R}) \rangle = \{B\} \cup \{P^k : k \in \mathbb{N}\}$.

1.8 DIE RESULTANTE R

Sei $\mathfrak{S} := \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ $(m \in \mathbb{N})$ die von der Extremalpunktmenge $\mathfrak{k}(\mathfrak{T})$ einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ erzeugte Halbgruppe. Die Abbildung R von $\mathfrak{M}_m^b(\mathfrak{S})$ in $\mathbb{M}(m,\mathbb{K})$, definiert für alle $\mu \in \mathfrak{M}^b(\mathfrak{S})$ ($\mu := \sum_{k=1}^{m} \beta_k \varepsilon_{s_k}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$ für alle $k = 1,2, \ldots, m$), sei durch $R(\mu) := \sum_{k=1}^{m} \beta_k s_k$ gegeben.
Ihre Restriktion auf $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{S})$ heißt <u>die Resultante</u> (oder Schwerpunktabbildung).
Diese Sprechweise wird auch für die auf $\mathfrak{M}^b(\mathfrak{S})$ definierte Abbildung beibehalten.

Aus der Definition der Resultanten R folgt :

(α) R ist ein stetiger Algebren-Homomorphismus von $\mathfrak{M}^b(\mathfrak{S})$ in $\mathbb{M}(m,\mathbb{K})$.

(β) $R(\mathfrak{M}^1(\mathfrak{S})) = \mathfrak{T}$.

[<u>$R(\mathfrak{M}^1(\mathfrak{S})) \subset \mathfrak{T}$:</u> Sei $\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{S})$. Dann ist μ von der Gestalt $\mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varepsilon_{s_i}$ für gewisse $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ und $s_i \in \mathfrak{S}$ für alle $i = 1,2, \ldots, m$.

Also $R(\mu) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_i$.
Da jedes $S_i \in \mathfrak{G}$ eine konvexe Kombination der Elemente von $\ell(\mathfrak{T})$ mit Koeffizienten aus $[0,1]$ darstellt, ist schließlich $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_i = \sum_{S \in \ell(\mathfrak{T})} \alpha_S S$, wobei $\alpha_S \geq 0$ für alle $S \in \ell(\mathfrak{T})$ und $\sum_{S \in \ell(\mathfrak{T})} \alpha_S = 1$ gilt.
Daraus folgt $R(\mu) \in \mathfrak{T}$.

<u>$\mathfrak{T} \subset R(\mathcal{M}^1(\mathfrak{G}))$:</u> Sei $A \in \mathfrak{T}$. Dann gilt $A = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i S_i$ für gewisse $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1$ und $S_i \in \ell(\mathfrak{T})$ für alle $i = 1,2, \ldots ,l$ $(1 \leq l \leq m)$.

Definiere $\mu := \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \varepsilon_{S_i}$. Dann ist μ ein Element in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$ mit $\operatorname{supp}(\mu) \subset \ell(\mathfrak{T}) \; (\subset \mathfrak{G})$, und μ ist ein R - Urbild von A.

(τ) Im allgemeinen ist R <u>nicht injektiv</u>.
Das ist offensichtlich ; wir belegen dies dennoch durch ein einfaches Beispiel, das in der Folge noch an verschiedenen Stellen benötigt wird [vgl. § 2.1, 2.3, 2.5, 2.8 und Kap. IV, § 2.11 (τ)].

1.9 BEISPIEL : Für $\mathfrak{T} := \mathfrak{P}(2)$ ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}(2) = \{e, a, b, c\}$.
Dabei bezeichnen

$$e := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und

$$c := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aus einer kleinen Rechnung ergibt sich :

$$R\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_a + \tfrac{1}{2}\varepsilon_b\right) = R\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_e + \tfrac{1}{2}\varepsilon_c\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

1.10 SATZ : Für jede Halbgruppe $\mathfrak{T}$ in $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ sind folgende Aussagen äquivalent :

(i) $\mathfrak{T}$ ist eine E-Halbgruppe.

(ii) Es existieren ein $k \in \mathbb{N}$, eine E-Halbgruppe $\mathfrak{R}$ in $\mathbb{P}(k)$, eine Teilalgebra $\mathfrak{A}$ von $\mathbb{M}(k,\mathbb{R})$, welche $\mathfrak{R}$ umfaßt, und ein stetiger Algebren - - Homomorphismus f von $\mathfrak{A}$ in $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ mit der Eigenschaft $f(\mathfrak{R}) = \mathfrak{T}$.

Beweis : Wegen des Satzes 1.5 genügt es, nur die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) zu zeigen.

Es sei D die in Kap. I, § 2.6 definierte treue Darstellung der Algebra $\mathfrak{U}^b(\mathfrak{G})$ in $\mathbb{M}(m,\mathbb{R})$ ($m := o(\mathfrak{G})$). Identifizieren wir nun (vermöge der Bijektion φ) $\mathfrak{U}^b(\mathfrak{G})$ mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^m$, dann folgt, da lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen stetig sind : D ist ein Homöomorphismus von $\mathfrak{U}^b(\mathfrak{G})$ auf $\mathfrak{A} := D(\mathfrak{U}^b(\mathfrak{G}))$. Folglich ist D^{-1} ein stetiger Algebren - Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{U}^b(\mathfrak{G})$.

Man definiert nun $f := RoD^{-1}$ (R ist die Resultante). Offenbar ist f ein stetiger Algebren - Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ in $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$.
Setzt man $k := m$ und $\mathfrak{R} := D(\mathfrak{U}^1(\mathfrak{G}))$ ($\subset \mathfrak{A}$), so ist $\mathfrak{R}$ eine E-Halbgruppe in $\mathbb{P}(k)$ [vgl. § 1.2(ε) und Kap. I, § 2.7(α)], und wegen § 1.8(β) gilt :

$f(\mathfrak{R}) = RoD^{-1}(D(\mathfrak{U}^1(\mathfrak{G}))) = R(\mathfrak{U}^1(\mathfrak{G})) = \mathfrak{T}$, was den Beweis der obigen Implikation vervollständigt.

1.11 KOROLLAR : Zu jeder Halbgruppe $\mathfrak{T}$ in $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, welche die zusätzliche Eigenschaft besitzt, daß $\mathfrak{G}$ eine Gruppe ist, existieren ein $k \in \mathbb{N}$, eine E-Halbgruppe $\mathfrak{R}$ in $\mathbb{D}(k)$, eine Teilalgebra $\mathfrak{A}$ von $\mathbb{M}(k,\mathbb{R})$, welche $\mathfrak{R}$ umfaßt, und ein stetiger Algebren - Homomorphismus f von $\mathfrak{A}$ in $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ mit der Eigenschaft $f(\mathfrak{R}) = \mathfrak{T}$.

Beweis : Klar wegen Kap. I, § 2.7 (γ).

§ 2. IDEMPOTENTE ELEMENTE EINER E-HALBGRUPPE

Im folgenden bezeichne stets $\mathfrak{J} := \{A \in \mathfrak{T} : A = A^2\}$ und $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} := \{A \in \mathfrak{J} : A \text{ primitiv}\}$.
Weiter seien $\mathfrak{J} := \{\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G}) : \mu = \mu^2\}$,
$\mathfrak{P} := \{\mu \in \mathfrak{J} : \mu \text{ primitiv}\}$ und $\mathfrak{M} := \{\mu \in \mathfrak{J} : \mu \text{ maximal}\}$.

$\mathfrak{K}$ sei der Kern von $\mathfrak{G}$. Nach Kap. II, § 1.12 stellt $\mathfrak{K}$ die disjunkte Vereinigung von maximalen, paarweise isomorphen Gruppen $\mathfrak{H}_{kl}$, $k=1,2,\ldots,p$, $l=1,2,\ldots,q$ $(p,q \in \mathbb{N})$ in $\mathfrak{G}$ dar: $\mathfrak{K} = \dot{\bigcup_{k=1}^{p}} \dot{\bigcup_{l=1}^{q}} \mathfrak{H}_{kl}$.

Ferner gilt für jede (vollständig) einfache Halbgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ gemäß Kap. II, § 1.14, daß $\mathfrak{P}$ stets als disjunkte Vereinigung von paarweise isomorphen Gruppen $\mathfrak{g}_{ij}$, $i=1,2,\ldots,r$, $j=1,2,\ldots,s$ $(r,s \in \mathbb{N})$ in $\mathfrak{G}$ dargestellt werden kann: $\mathfrak{P} = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} \dot{\bigcup_{j=1}^{s}} \mathfrak{g}_{ij}$.

Es bezeichne schließlich $\omega_{\mathfrak{g}_{ij}}$ bzw. $\omega_{\mathfrak{H}_{kl}}$ – wie üblich – das normierte Haar-Maß auf $\mathfrak{g}_{ij}$ bzw. auf $\mathfrak{H}_{kl}$.

2.1 SATZ: Ein Element $A \in \mathfrak{T}$ ist genau dann idempotent, wenn A das Bild eines idempotenten Maßes $\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$ unter der Resultanten R ist. Das Maß μ ist nicht eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $A \in \mathfrak{J}$. Man betrachte die Menge $[\mu] := \{\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G}) : R(\mu) = A\}$. $[\mu]$ ist offenbar eine nicht-leere Unterhalbgruppe von $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$ (R ist surjektiv und A ein Idempotent).
Weiter ist $[\mu]$ abgeschlossen in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$ (R ist stetig).
Folglich ist $[\mu]$ eine kompakte Unterhalbgruppe von $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$, und somit besitzt $[\mu]$ nach Kap. II, § 1.10 (2) ein idempotentes Element $\mu = \mu^2$.
Die Umkehrung ist trivial.

Das Beispiel von § 1.8 zeigt die Nicht-Eindeutigkeit des Maßes μ.

2.2 DEFINITION: Sei $A \in \mathfrak{T}$ und sei $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$. Dann heißt $\mathfrak{H}$ ein Träger von A, wenn A als konvexe Kombination aller Elemente von $\mathfrak{H}$ mit strikt positiven Koeffizienten dargestellt werden kann (d.h., $A = \sum_{S \in \mathfrak{H}} \lambda_S \cdot S$, wobei $\lambda_S > 0$ für alle $S \in \mathfrak{H}$ und $\sum_{S \in \mathfrak{H}} \lambda_S = 1$ gilt).

Es ist klar, daß ein Element $A \in \mathfrak{T}$ mehrere Träger besitzen kann; ebenso, daß zu einem bestimmten Träger $\mathfrak{H}$ von A mehrere konvexe Kombinationen der Elemente von $\mathfrak{H}$ mit strikt positiven Koeffizienten existieren, welche A darstellen können. Dies erklärt folgendes

2.3 BEISPIEL: Sei $A \in \mathbb{P}(2)$, $A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Ferner seien e, a, b, c wie im Beispiel von § 1.9, also $\{ e, a, b, c \} = \mathbb{F}(2)$.

Offenbar gilt $A = \frac{1}{2}(e+c) = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{4}(e+c+a+b) = \frac{2}{6}(e+c) + \frac{1}{6}(a+b)$.

2.4 KOROLLAR: Für jedes $A \in \mathfrak{T}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $A \in \mathfrak{J}$

(ii) Es existieren eine (vollständig) einfache Unterhalbgruppe $\mathfrak{P}$ $(= \overset{r}{\underset{i=1}{\dot{\bigcup}}} \overset{s}{\underset{j=1}{\dot{\bigcup}}} \mathfrak{g}_{ij})$ von $\mathfrak{G}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+^*$ für alle $i = 1,2,\ldots,r$ und $\beta_j \in \mathbb{R}_+^*$ für alle $j = 1,2,\ldots,s$ $(r, s \in \mathbb{N})$ mit $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{j=1}^{s} \beta_j = 1$, so daß $A = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j R(\omega_{\mathfrak{g}_{ij}})$ gilt.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$, $\mu = \mu^2$ das nach Satz 2.1 existierende idempotente Maß mit $R(\mu) = A$. Nach [28], Theorem 2.3 bzw. 2.4 ist μ von der Gestalt $\mu = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \omega_{\mathfrak{g}_{ij}}$, was die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ergibt.

(ii) $\Longrightarrow$(i): Man definiert $\mu := \sum_{j=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \omega_{\vartheta_{ij}}$.
Wiederum nach [28], Theorem 2.3 bzw. 2.4 gilt $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{G})$, $\mu = \mu^2$ und somit auch $A = A^2 (= R(\mu))$.

2.5 BEISPIEL: Wir betrachten wiederum das Beispiel von § 1.9: $\mathfrak{T} := \mathfrak{P}(2)$ mit $\mathcal{G} = \mathcal{F}(2) = \{e, a, b, c\}$.

Es gilt:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	a	b	b
b	b	a	b	a
c	c	a	b	e

Somit stellt $\{\{e\}, \{a\}, \{\mathcal{G}\}, \{e,c\}, \{a,b\}\}$ die Menge aller (vollständig) einfachen Unterhalbgruppen $\mathfrak{P}$ von $\mathcal{G}$ dar.
Es gilt $\mathfrak{J} = \{\varepsilon_e, \frac{1}{2}(\varepsilon_e + \varepsilon_c)\} \cup \{\lambda\varepsilon_a + (1-\lambda)\varepsilon_{\mathcal{G}} : \lambda \in [0,1]\}$ [vgl. [28], Theorem 2.3 bzw. 2.4], und wegen Satz 2.1 ist somit

$$\mathfrak{J} = R(\mathfrak{J}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ & \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix} : \lambda \in [0,1] \right\}.$$

2.6 SATZ: Ein Idempotent $A \in \mathfrak{T}$ ist genau dann primitiv, wenn A das Bild eines primitiven idempotenten Maßes $\pi \in \mathcal{M}^1(\mathcal{G})$ unter der Resultanten R ist.

Beweis: Sei $A \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}$. Man betrachtet die kompakte Unterhalbgruppe $R^{-1}(\{A\})$ von $\mathcal{M}^1(\mathcal{G})$.
Sei M das stets existierende minimale Ideal von $R^{-1}(\{A\})$.
M enthält (mindestens) ein idempotentes Maß $\pi = \pi^2$ $(R(\pi) = A)$, welches nach Kap. II, § 1.10, primitiv in $R^{-1}(\{A\})$ ist.

Wir zeigen nun, daß π sogar primitiv in $\mathcal{M}^1(\mathcal{G})$ ist. Angenommen, es existiere ein $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{G}) \setminus R^{-1}(\{A\})$, $\mu = \mu^2$ mit der Eigenschaft $\mu = \mu\pi = \pi\mu$.
Dann wäre $R(\mu) \neq A$, $R(\mu) = (R(\mu))^2$ und zugleich $R(\mu) = R(\mu)\, A = A\, R(\mu)$, was im Widerspruch zur Primitivität von A steht.

Umgekehrt sei $\pi \in \mathfrak{P}$. Es ist zu beweisen, daß $A := R(\pi)$ in $\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}$ liegt, d.h., daß für alle $F \in \mathfrak{J}$ mit $F = FA = AF$ $(= AFA)$ $F = A$ gilt.

$R^{-1}(\{F\})$ ist eine kompakte Unterhalbgruppe von $\mathcal{M}^1(\mathcal{G})$ und somit ebenfalls $\pi R^{-1}(\{F\})\pi$.
Es gibt also ein $f \in \pi R^{-1}(\{F\})\pi$ mit $f = f^2$.
Nun ist für alle $\mu \in \pi R^{-1}(\{F\})\pi$ $\mu = \mu\pi = \pi\mu$ und $R(\mu) = F$. Insbesondere gilt also $f = f\pi = \pi f$, woraus $f = \pi$ folgt. Somit ist $F = R(f) = R(\pi) = A$, was zu beweisen war.

2.7 KOROLLAR: Sei $\mathfrak{T}$ eine E-Halbgruppe und sei $\mathcal{K} = \bigcup_{k=1}^{p} \bigcup_{\ell=1}^{q} \mathcal{H}_{k\ell}$ die Zerlegung des Kerns $\mathcal{K}$ von $\mathcal{G}$ in maximale, paarweise isomorphe Gruppen. Dann sind für jedes $A \in \mathfrak{T}$ folgende Aussagen äquivalent:
(i) $A \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{T}}$.

(ii) Es existieren $\alpha_1,\dots,\alpha_p$, $\beta_1,\dots,\beta_q \geq 0$ mit $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = \sum_{\ell=1}^{q} \beta_\ell = 1$, so daß $A = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_k\beta_\ell \; R(\omega_{\mathcal{H}_{k\ell}})$ gilt.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $\pi \in \mathcal{M}^1(\mathcal{G})$, $\pi = \pi^2$ das nach Satz 2.6 existierende primitive idempotente Maß mit $R(\pi) = A$.
Nach [28], Theorem 3.4 ist π von der Gestalt $\pi = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_k\beta_\ell \, \omega_{\mathcal{H}_{k\ell}}$, was die Implikation (i) $\Longrightarrow$ (ii) erbringt.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Zu $A = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_k\beta_\ell \; R(\omega_{\mathcal{H}_{k\ell}})$ definiert man das Maß $\pi \in \mathcal{M}^1(\mathcal{G})$, $\pi := \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_k\beta_\ell \, \omega_{\mathcal{H}_{k\ell}}$.
Wiederum ist nach [28], Theorem 3.4 π ein primitives Idempotent in $\mathcal{M}^1(\mathcal{G})$. Ferner ist gemäß Satz 2.6 $R(\pi)$ ein primitives Idempotent in $\mathfrak{T}$. Da $R(\pi) = A$ gilt, gehört A zu $\mathfrak{J}_{\mathfrak{T}}$.

2.8 BEISPIEL: Wir betrachten wiederum das Beispiel 2.5:
$\mathfrak{T} := P(2)$ mit $\mathcal{G} = \{e,a,b,c\}$.

Wir wissen schon $\mathfrak{J} = \left\{\varepsilon_e, \frac{1}{2}(\varepsilon_e + \varepsilon_c)\right\} \cup \left\{\varepsilon_a + (1-\lambda)\varepsilon_b : \lambda \in [0,1]\right\} =$

$$= \{\mu_1, \mu_2\} \cup \{\mu_{3,\lambda} : \lambda \in [0,1]\},$$

wobei $\mu_1 := \varepsilon_e$, $\mu_2 := \frac{1}{2}(\varepsilon_e + \varepsilon_c)$ und $\mu_{3,\lambda} := \lambda\varepsilon_a + (1-\lambda)\varepsilon_b$ für alle $\lambda \in [0,1]$ ist.

Es gilt

	μ_1	μ_2	$\mu_{3,\lambda}$
μ_1	μ_1	μ_2	$\mu_{3,\lambda}$
μ_2	μ_2	μ_2	$\mu_{3,\lambda}$
$\mu_{3,\lambda}$	$\mu_{3,\lambda}$	$\mu_{3,\frac{1}{2}}$	$\mu_{3,\lambda}$

und daher

(i) $\mu_2 \leq \mu_1$ (d.h. $\mu_2 = \mu_2\mu_1 = \mu_1\mu_2$)

(ii) $\mu_{3,\lambda} \leq \mu_1$

(iii) $\mu_{3,\frac{1}{2}} \leq \mu_2 \leq \mu_1$ (also μ_1 ist maximal in $\mathfrak{J}$)

Ferner sind für $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ die Paare $(\mu_{3,\lambda_1}, \mu_{3,\lambda_2})$ unvergleichbar, denn $\mu_{3,\lambda_1} = \mu_{3,\lambda_2}\mu_{3,\lambda_1} + \mu_{3,\lambda_1}\mu_{3,\lambda_2} = \mu_{3,\lambda_2}$.

Folglich ist $\mathfrak{P} = \{\mu_{3,\lambda} : \lambda \in [0,1]\}$ und somit wegen Satz 2.5

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{P}} = R(\mathfrak{P}) = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & (1-\lambda) \\ \lambda & (1-\lambda) \end{bmatrix} : \lambda \in [0,1] \right\}.$$

2.9 BEISPIEL: Seien e,a,b,c wie im Beispiel von § 1.9. Ferner seien $\mathfrak{J} := \{\pm e, \pm a, \pm b, \pm c\}$ und $\mathfrak{H} := k(\mathfrak{J})$. $\mathfrak{H}$ ist offenbar eine E-Halbgruppe mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{J}$ und $c \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{G}$.

Man betrachtet die Familie von Maßen $\mu_\lambda \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$,

$$\mu_\lambda := \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_{-a}) + \frac{1-\lambda}{2}(\varepsilon_b + \varepsilon_{-b}), \quad \lambda \in [0,1].$$

Die Maße μ_λ, $\lambda \in [0,1]$ sind <u>primitive idempotente Maße</u> in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$.

[Der Beweis ist leicht erbracht. Man zeigt zunächst:

(1) $\xi\mu_\lambda = \mu_\lambda$ für alle $\xi \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$ und alle $\lambda \in [0,1]$.

Insbesondere gilt also $\mu_\lambda^2 = \mu_\lambda$ für alle $\lambda \in [0,1]$.
Weiterhin gilt für jedes $\xi \in \mathcal{M}^1(\mathcal{G})$ mit $\xi = \xi^2$ und $\xi \leq \mu_\lambda$ (d.h., $\xi = \xi\mu_\lambda = \mu_\lambda\xi$ $\xi = \mu_\lambda$. Also ist μ_λ, $\lambda \in [0,1]$ ein primitives Idempotent in $\mathcal{M}^1(\mathcal{G})$.]
Ferner gilt: $\mathcal{M}^1(\mathcal{G})$ enthält kein Nullelement [wegen (1)].
Schließlich erhält man $R(\mu_\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in [0,1]$ [wegen Satz 2.6, weil o das einzige primitive Idempotent in $\mathcal{T}$ ist].

2.10 BEMERKUNG: Besitzt eine E-Halbgruppe $\mathcal{T}$ kein Nullelement, so besitzt auch $\mathcal{M}^1(\mathcal{G})$ kein Nullelement.
Enthält nun eine E-Halbgruppe $\mathcal{T}$ ein Nullelement, so folgt daraus im allgemeinen nicht, daß auch $\mathcal{M}^1(\mathcal{G})$ ein Nullelement enthält. Dies ist aus dem Beispiel 2.9 ersichtlich.

Es bezeichne nun $\tilde{\mathcal{J}}$ die Menge aller Idempotenten $A(=A^2) \in \mathcal{T}$ mit der Eigenschaft (*):

(*) A besitzt einen Träger $\mathcal{H}$, der eine (vollständig) einfache Unterhalbgruppe von $\mathcal{G}$ ist, und $\mathcal{H}$ besitzt keine echte Unterhalbgruppe, welche bereits alle Idempotenten aus $\mathcal{H}$ umfaßt.

2.11 SATZ: Es gilt $R(\mathfrak{M}) \subset \tilde{\mathcal{J}}$.
Ist zudem $\mathcal{G}$ eine (vollständig) einfache Halbgruppe bzw. eine Gruppe, dann gilt sogar $R(\mathfrak{M}) = \tilde{\mathcal{J}}$.

Beweis: Sei $\mu \in \mathfrak{M}$. Nach [28], Theorem 11.1, folgt:
$\mathcal{H} := \operatorname{supp}(\mu)$ besitzt die Eigenschaft (*). Also $R(\mu) \in \tilde{\mathcal{J}}$.
Sei nun $\mathcal{G}$ selbst eine (vollständig) einfache Halbgruppe bzw. eine Gruppe. Es genügt zu zeigen: $\tilde{\mathcal{J}} \subset R(\mathfrak{M})$, d.h., für jedes $A \in \tilde{\mathcal{J}}$ existiert ein $\mu \in \mathfrak{M}$ mit $R(\mu) = A$.
Sei $A \in \tilde{\mathcal{J}}$ und sei $\mathcal{H}$ der Träger von A mit der Eigenschaft (*). Gemäß Kap. II, § 1.14 ist $\mathcal{H}$ die disjunkte Vereinigung von paarweise isomorphen Gruppen $\mathcal{G}_{ij}$ in $\mathcal{G}$,

$i=1,2,\ldots,r$, $j=1,2,\ldots,s$ $(r,s \in \mathbb{N})$: $\mathcal{H} = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} \mathcal{G}_{ij}$.

Also nach Kap. III, Korollar 2.4 ist A von der Gestalt

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j R(\omega_{\mathcal{G}_{ij}}) \quad \text{für gewisse } \alpha_i \in \mathbb{R}_+^*$$

und $\beta_j \in \mathbb{R}_+^*$ mit $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{j=1}^{s} \beta_j = 1$.

Man definiert nun das Maß $\mu := \sum_{i=j}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \omega_{g_{ij}}$.

Wegen [28], Theorem 2.3 bzw. 2.4 ist $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$, $\mu = \mu^2$.
Weiter gilt nach [28], Korollar 11.1 für jedes $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$, $\nu = \nu^2$, wobei $\mathfrak{G}$ eine (vollständig) einfache Halbgruppe bzw. eine Gruppe bildet, folgende Äquivalenz:
$\nu \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{G}} \iff$ supp (ν) besitzt die Eigenschaft $(*)$.
Da supp $(\mu) = h_\gamma$ ist, gehört μ zu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}$.
Nach Definition von μ gilt schließlich $R(\mu) = A$, was den Beweis des Satzes vervollständigt.

§ 3. GESTALT IDEMPOTENTER STOCHASTISCHER MATRIZEN

In diesem Abschnitt beschreiben wir diejenige Teilmenge von idempotenten stochastischen Matrizen, welche unter einem stetigen (affinen) Homomorphismus auf die Idempotenten einer E-Halbgruppe abgebildet werden.

Sei $A \in \mathfrak{H}$, $A = A^2$. Nach Korollar 2.4 ist A von der

Gestalt (1) $A = \sum_{i=1}^{r_o} \sum_{j=1}^{s_o} \alpha_i \beta_j R(\omega_{g_{ij}})$.

Man betrachtet den in § 1.10 definierten stetigen Algebren-Homomorphismus $f (:= RoD^{-1})$; f bildet die stochastische Matrix $D(\mu)$ mit $\mu := \sum_{i=1}^{r_o} \sum_{j=1}^{s_o} \alpha_i \beta_j \omega_{g_{ij}}$ auf die vorgegebene idempotente Matrix A ab ($f(D(\mu)) = (RoD^{-1})(D(\mu)) = R(\mu)$).

Wegen Kap. I, § 2.2 und 2.6 gilt für alle $\nu \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{S})$: $({}^tD(\mu))(\nu) = \nu * \mu$.

Sind also $a_{ij}^{(\mu)}$, $i,j=1,2,\ldots,m$ ($m := o(\mathfrak{S})$) die Koeffizienten der Matrix $D(\mu)$, dann gilt:

$$a_{ij}^{(\mu)} = \left\langle ({}^tD(\mu))(\varepsilon_{s_i}),\ \varepsilon_{s_j} \right\rangle = \left\langle \varepsilon_{s_i} * \mu\ ,\ \varepsilon_{s_j} \right\rangle$$

für alle $i,j=1,2,\ldots,m$.

Nun ist der spezielle Träger $\mathfrak{h}_\mu = \bigcup_{i=1}^{r_o} \bigcup_{j=1}^{s_o} \mathfrak{g}_{ij}$ von A, der zugleich der (eindeutig bestimmte) Träger des Maßes μ ist, eine (vollständig) einfache Unterhalbgruppe von $\mathfrak{S}$. Dann gilt nach Kap. II, § 1.13 für den Kern $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{S}$ stets $\mathfrak{h}_\mu \subset \mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{h}_\mu \cap \mathfrak{K} = \emptyset$.

I. FALL: $\mathfrak{h}_\mu \subset \mathfrak{K}$.

Es seien $\mathfrak{K} = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{H}_{ij}$ die disjunkte Vereinigung von maximalen paarweise isomorphen Gruppen $\mathfrak{H}_{ij}$ von $\mathfrak{S}$ [vgl. Kap. II, § 1.12] und $\mu = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \omega_{g_{ij}}$

mit $\alpha_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots,r$, $\beta_j \geq 0$, $j=1,2,\ldots,s$ und $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{j=1}^{s} \beta_j = 1$.

Ferner bezeichnen $\mathcal{G}_{ij} := \{G_1^{(ij)}, G_2^{(ij)}, \ldots, G_\xi^{(ij)}\}$ für alle $i=1,2,\ldots,r_o$ und $j=1,2,\ldots,s_o$ $(1 \leq r_o \leq r;\ 1 \leq s_o \leq s)$ wiederum diejenigen paarweise isomorphen Gruppen von $\mathfrak{G}$, deren disjunkte Vereinigung den speziellen Träger $\mathfrak{h}$ des Idempotenten $A \in \mathfrak{J}$ bilden.
Im Falle $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{K}$ gilt: $\mathcal{H}_{ij} = \mathcal{G}_{ij} \cup \{G_{\xi+1}^{(ij)}, G_{\xi+2}^{(ij)}, \ldots, G_\zeta^{(ij)}\}$ für alle $i=1,2,\ldots,r_o$, $j=1,2,\ldots,s_o$ $(\xi \leq \zeta \leq m)$.

(I 1) Für ein γ mit $1 \leq \gamma \leq \xi$ gilt:

$$\varepsilon_{G_\gamma^{(k\ell)}} * \mu = \varepsilon_{G_\gamma^{(k\ell)}} * \Big(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \frac{1}{\xi} \sum_{\delta=1}^{\xi} \varepsilon_{G_\delta^{(ij)}} \Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \frac{\beta_j}{\xi} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \sum_{\delta=1}^{\xi} \varepsilon_{G_\gamma^{(k\ell)}} * \varepsilon_{G_\delta^{(ij)}} =$$

$$\left[\text{Kap.II, § 1.14}\right] = \sum_{j=1}^{s} \frac{\beta_j}{\xi} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \sum_{\delta=1}^{\xi} \varepsilon_{G_\delta^{(kj)}} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\beta_j}{\xi} \sum_{\delta=1}^{\xi} \varepsilon_{G_\delta^{(kj)}}$$

$(k=1,2,\ldots,r, \quad \ell = 1,2,\ldots,s)$.
Folglich ist

$$a_{G_\gamma^{(k\ell)}, G_{\gamma'}^{(k'\ell')}}^{(\mu)} = \Big\langle \sum_{j=1}^{s} \frac{\beta_j}{\xi} \sum_{\delta=1}^{\xi} \varepsilon_{G_\delta^{(kj)}}, \ \varepsilon_{G_{\gamma'}^{(k'\ell')}} \Big\rangle$$

für alle $k, k' = 1,2,\ldots,r$, $\ell,\ell' = 1,2,\ldots,s$, $\gamma' = 1,2,\ldots,\zeta$ und γ mit $1 \leq \gamma \leq \xi$.
D.h.

$$(1) \quad a_{G_\gamma^{(k\ell)}, G_{\gamma'}^{(k'\ell')}}^{(\mu)} = \begin{cases} 0 & , \text{ für alle } k' \neq k \\ \dfrac{\beta_{\ell'}}{\xi} & , \text{ für alle } k' = k \text{ und alle } \gamma' \text{ mit } 1 \leq \gamma' \leq \xi \\ 0 & , \text{ für alle } k' = k \text{ und alle } \gamma' \text{ mit } \xi+1 \leq \gamma' \leq \zeta \end{cases}$$

[Wie man schon erwartet, ist $\sum_{k'=1}^{r} \sum_{\ell'=1}^{s} \sum_{\gamma'=1}^{\zeta} a^{(\mu)}_{G_\gamma(k\ell),G_{\gamma'}(k'\ell')} =$

$= \sum_{\ell'=1}^{s} \sum_{\gamma'=1}^{\zeta} a^{(\mu)}_{G_\gamma(k\ell),G_{\gamma'}(k\ell')} = \sum_{\ell'=1}^{s} \sum_{\gamma'=1}^{\xi} \frac{\beta_{\ell'}}{\xi} =$

$= \sum_{\ell'=1}^{s} \xi \left(\frac{\beta_{\ell'}}{\xi}\right) = 1$].

(I 2) Für ein γ mit $\xi+1 \leq \gamma \leq \zeta$ gilt:

$$\varepsilon_{G_\gamma(k\ell)} * \mu = \varepsilon_{G_\gamma(k\ell)} * \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \frac{1}{\xi} \sum_{\delta=1}^{\xi} \varepsilon_{G_\delta(ij)}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \frac{\beta_j}{\xi} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left(\varepsilon_{G_{\delta_1}(kj)} + \varepsilon_{G_{\delta_2}(kj)} + \varepsilon_{G_{\delta_\xi}(kj)}\right)$$

Dabei sind $G_{\delta_x}^{(kj)}$ geeignete Elemente der Gruppe $\mathcal{H}_{kj}$ für alle $x = 1,2,\ldots,\xi$.
Folglich ist

$$a^{(\mu)}_{G_\gamma(k\ell),G_{\gamma'}(k'\ell')} = \left\langle \sum_{j=1}^{s} \frac{\beta_j}{\xi} \sum_{x=1}^{\xi} \varepsilon_{G_{\delta_x}(kj)}, \varepsilon_{G_{\gamma'}(k'\ell')} \right\rangle$$

für alle $k,k' = 1,2,\ldots,r$, $\ell,\ell' = 1,2,\ldots,s$, $\gamma' = 1,2,\ldots,\zeta$ und γ mit $\xi+1 \leq \gamma \leq \zeta$.
D.h.,

$$(2)\quad a^{(\mu)}_{G_\gamma(k\ell),G_{\gamma'}(k'\ell')} = \begin{cases} 0 & \text{, für alle } k' \neq k \\ \frac{\beta_{\ell'}}{\xi} & \text{, für } k' = k \text{ und } \gamma' \in \{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_\xi\} \\ 0 & \text{, für } k' = k \text{ und } \gamma' \notin \{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_\xi\}. \end{cases}$$

Wie man schon erwartet, gilt wiederum

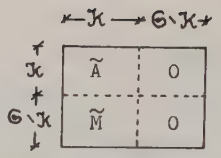
$$\left[\sum_{k'=1}^{r} \sum_{\ell'=1}^{s} \sum_{\gamma'=1}^{\zeta} a^{(\mu)}_{G_\gamma(k\ell),G_{\gamma'}(k'\ell')} = \sum_{\ell'=1}^{s} \xi \left(\frac{\beta_{\ell'}}{\xi}\right) = 1\right].$$

(I 3) Für $P,Q \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{K}$ gilt stets $a^{(\mu)}_{PQ} = 0$:
Denn supp $(\varepsilon_P * \mu) = P\mathcal{H} \subset P\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ und daher

$a^{(\mu)}_{PQ} = \langle \varepsilon_P * \mu , \varepsilon_Q \rangle = 0$

Also ist die idempotente stochastische Matrix $D(\mu)$ mit

$f(D(\mu)) = A$ von der Gestalt



Dabei bezeichnet $\widetilde{A}$ eine idempotente Matrix in $\mathbb{P}(p)$ mit $p := o(\mathfrak{K})$, deren Elemente durch (1) und (2) gegeben sind, und $\widetilde{M}$ eine qxp-stochastische Matrix ($p+q = m$ ($:=o(\mathfrak{G})$)) mit der Eigenschaft $\widetilde{M}\,\widetilde{A} = \widetilde{M}$.

II. FALL: $\mathfrak{h}_\gamma \cap \mathfrak{K} = \emptyset$.

Sei $\mu = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \omega_{\mathfrak{g}_{ij}}$ mit $\alpha_i > 0$, $i=1,2,\ldots,r$,

$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, $\beta_j > 0$, $j = 1,2,\ldots,s$, $\sum_{j=1}^{s} \beta_j = 1$.

Dabei sind $\mathfrak{g}_{ij} := \left\{ G_1^{(ij)}, G_2^{(ij)}, \ldots, G_\xi^{(ij)} \right\}$ ($i=1,2,\ldots,r$, $j=1,2,\ldots,s$) disjunkte paarweise isomorphe Gruppen von $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{h}_\gamma = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{g}_{ij}$).

(II 1) Für alle $k, k' = 1,2,\ldots,r$, $\ell,\ell' = 1,2,\ldots,s$ und $\gamma,\gamma' = 1,2,\ldots,\xi$ gilt [vgl. I. Fall (I 1)]:

$$(3)\quad a^{(\mu)}_{G_\gamma^{(k\ell)} G_{\gamma'}^{(k'\ell')}} = \begin{cases} 0, & \text{für alle } k' \neq k \\ \dfrac{\beta_{\ell'}}{\xi}, & \text{für alle } k' = k \text{ und alle } \gamma' (=1,2,\ldots,\xi). \end{cases}$$

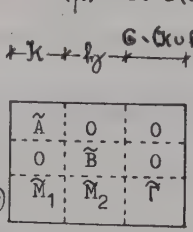
(II 2) Für $K \in \mathfrak{K}$, $H \in \mathfrak{h}_\gamma$ und $P \in \mathfrak{G} \setminus (\mathfrak{h}_\gamma \cup \mathfrak{K})$ gilt stets

$$a^{(\mu)}_{KH} = a^{(\mu)}_{KP} = 0:$$

Denn $\operatorname{supp}(\varepsilon_K * \mu) = K\mathfrak{h}_\gamma \subset \mathfrak{K}\mathfrak{G} \subset \mathfrak{K}$, und daher

$0 = \langle \varepsilon_K * \mu, \varepsilon_H \rangle = \langle \varepsilon_K * \mu, \varepsilon_P \rangle$.

Folglich ist die Matrix $D(\mu)$ mit $f(D(\mu)) = A$ von der Gestalt



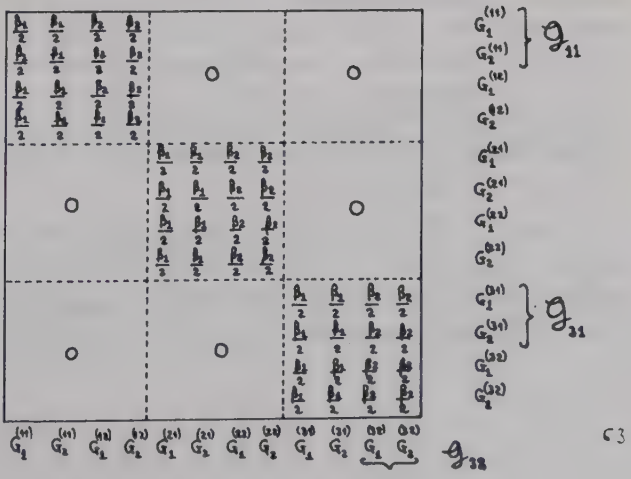
Dabei bezeichnet $\widetilde{A}$ eine idempotente Matrix in $\mathfrak{P}(p)$ mit $p := o(\mathfrak{K})$, deren Koeffizienten durch $a^{(\mu)}_{K,K'} = \langle \varepsilon_K * \mu, \varepsilon_{K'} \rangle$ für alle $K, K' \in \mathfrak{K}$ gegeben sind, $\widetilde{B}$ eine idempotente Matrix in $\mathfrak{P}(q)$ mit $q := o(\mathfrak{H})$, deren Koeffizienten durch (3) bestimmt sind, und $\widetilde{\Gamma}$ eine idempotente Matrix in $\mathfrak{S}(t)$ $(p+q+t = m\ (:= o(\mathfrak{G}))))$, deren Koeffizienten wiederum durch $a^{(\mu)}_{PQ} = \langle \varepsilon_P * \mu, \varepsilon_Q \rangle$ für alle $P, Q \in \mathfrak{G} \setminus (\mathfrak{K} \cup \mathfrak{H})$ gegeben sind. Schließlich ist $\widetilde{M}_1$ bzw. $\widetilde{M}_2$ eine substochastische Matrix mit Koeffizienten $a^{(\mu)}_{RT} = \langle \varepsilon_R * \mu, \varepsilon_T \rangle$ für alle $R \in \mathfrak{G} \setminus (\mathfrak{K} \cup \mathfrak{H})$ und $T \in \mathfrak{K}$ bzw. $T \in \mathfrak{H}$, welche die Eigenschaft $\widetilde{\Gamma}\widetilde{M}_1\widetilde{A} = 0$ bzw. $\widetilde{\Gamma}\widetilde{M}_2\widetilde{B} = 0$ hat.

BEISPIEL: Man betrachtet eine E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$, derart, daß ihr $\mathfrak{G}$ $(= \bigcup_{i=1}^{3} \bigcup_{j=1}^{2} \mathfrak{g}_{ij})$ eine einfache Halbgruppe ist. Es wird ferner $o(\mathfrak{g}_{ij}) = 2$ für alle $i = 1,2,3$, $j = 1,2$ vorausgesetzt.

Sei nun $A \in \mathfrak{T}$, $A(=A^2) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \alpha_i \beta_j R(\omega_{\mathfrak{g}_{ij}})$ vorgegeben $(\alpha_i > 0,\ i=1,2,3,\ \beta_j > 0,\ j=1,2$ und $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \sum_{j=1}^{2} \beta_j = 1)$.

Dann ist die stochastische Matrix $D(\mu)$ $(\mu := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \alpha_i \beta_j \omega_{\mathfrak{g}_{ij}})$ mit der Eigenschaft $f(D(\mu)) = A$ durch

$D(\mu) =$



gegeben.

§ 4. GRUPPEN IN EINER E-HALBGRUPPE

4.1 SATZ: Jede Gruppe Γ von beschränkten positiven Maßen auf einer endlichen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist endlich.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß Γ entweder die triviale Gruppe, bestehend aus dem Nullmaß, oder eine Gruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathfrak{H}$ ist.
O.B.d.A sei Γ abgeschlossen.
Ist nun $\xi (= \xi^2)$ das Einselement von Γ, dann gilt $\|\xi^2\| = \|\xi\| \cdot \|\xi\| = \|\xi\|$. (Die Abbildung $\mu \longrightarrow \|\mu\|$ von $\mathfrak{M}_+^1(\mathfrak{H})$ in $\mathbb{R}_+$ ist bekanntlich ein Halbgruppen-Homomorphismus)
Folglich ist $\|\xi\|$ entweder 0 oder 1.
Wäre $\|\xi\| = 0$ (d.h., ξ ist das Nullmaß auf $\mathfrak{H}$), dann müßte Γ die triviale Gruppe bestehend aus dem Nullmaß auf $\mathfrak{H}$ sein ($\Gamma = \{\xi\}$).
Wäre $\|\xi\| = 1$, dann wäre $\Gamma \subset \mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})$:
Nehmen wir an, daß ein $\mu \in \Gamma$ mit $\|\mu\| \neq 1$ existiert.
O.B.d.A. sei $\|\mu\| < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mu^n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\mu\|^n = 0$.
Folglich muß das Nullmaß zu der Gruppe Γ gehören (Γ ist abgeschlossen), was im Widerspruch zur Gruppeneigenschaft steht.

Zu zeigen bleibt also, daß jede Gruppe Γ von Maßen in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})$ endlich ist:
Aus der Inklusion $\mathrm{supp}(\Gamma) \subset \mathfrak{H}$ erhält man die Endlichkeit des Trägers von Γ und somit die Endlichkeit der Gruppe G in der Rees-Halbgruppe $G \times A \times B \cong \mathrm{supp}(\Gamma)$ [vgl. Kap. II, Satz 2.2]. Andererseits ist jedes $\nu \in \Gamma$ von der Gestalt $\nu = (\varepsilon_g * \omega_N) \circledast \xi \circledast \zeta$ [vgl. Idem], und daher gibt es $o(G/N)$ verschiedene Elemente ν in Γ, womit die Endlichkeit von Γ bewiesen ist.

Sei wiederum $\mathfrak{H}$ eine endliche Halbgruppe.
Auf der Menge $\mathfrak{T} := \mathfrak{T}(\mathfrak{M}^1(\mathfrak{H}))$ aller Gruppen Γ in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $\mathfrak{R}$ durch

$$(\Gamma, E) \in \mathfrak{R} : \Longleftrightarrow o(\Gamma) = o(E) \qquad (\Gamma, E \in \mathfrak{T}).$$

Für die $\mathfrak{R}$-Äquivalenzklassen $[\Gamma] := \{E \in \mathbb{\Gamma} : o(E) = o(\Gamma)\}$, die bekanntlich eine Zerlegung von $\mathbb{\Gamma}$ bilden, gilt folgendes

4.2 KOROLLAR: $\mathbb{\Gamma}$ läßt sich in endlich viele $\mathfrak{R}$-Äquivalenzklassen zerlegen.

Beweis: Nach Satz 4.1 ist die Anzahl der Elemente einer Gruppe $\Gamma \in \mathbb{\Gamma}$ endlich, sogar $\leq$ Anzahl der Elemente von supp (Γ), und supp(Γ) ist beschränkt durch die endliche Zahl $o(\mathfrak{J})$ für alle $\Gamma \in \mathbb{\Gamma}$.

4.3 SATZ: Jede Gruppe $\mathfrak{G}$ in einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ ist endlich und läßt sich als homomorphes Bild unter der Resultanten R einer Gruppe Γ von Maßen in $\mathcal{M}^1(G)$ darstellen.

Beweis: O.B.d.A sei $\mathfrak{G}$ abgeschlossen.
Man betrachtet die nicht-leere, abgeschlossene (und somit kompakte) Halbgruppe $H := R^{-1}(\mathfrak{G})$ (R ist surjektiv und stetig).
Seien M(H) das stets existierende minimale zweiseitige Ideal der Halbgruppe H und $\pi (= \pi^2)$ ein Idempotent in M(H). Nach Kap. II, § 1.10 ist π primitives Idempotent in H und $\Gamma := \pi H \pi$ $(= \pi M(H) \pi)$ eine kompakte Gruppe.
Da nach Satz 4.1 jede Gruppe in $\mathcal{M}^1(G)$ (insbesondere also Γ) endlich ist, bleibt nur $R(\Gamma) = \mathfrak{G}$ zu zeigen.
Nun bildet R jedes Idempotent in H, insbesondere das Idempotent $\pi \in H$, auf das Einheitselement E von $\mathfrak{G}$ ab.
Sei also $G \in \mathfrak{G}$ vorgegeben. Dann existiert ein $g \in H$ mit $R(g) = G$. Folglich ist $G = E\, R(g)\, E = R(\pi)\, R(g)\, R(\pi) = R(\pi g \pi)$ und somit $R(\Gamma) = \mathfrak{G}$.

4.4 KOROLLAR: Jede Gruppe von substochastischen (und somit von stochastischen bzw. doppelt stochastischen) Matrizen ist endlich.

4.5 BESTIMMUNGSVERFAHREN FÜR DIE MENGE $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\mathfrak{T})$ ALLER GRUPPEN $\mathfrak{G}$ IN $\mathfrak{T}$.

Hierzu genügt es wegen Satz 4.3, die Menge $\mathbb{\Gamma} := \mathbb{\Gamma}(\mathcal{M}^1(G))$ aller Gruppen Γ in $\mathcal{M}^1(G)$ zu bestimmen. Dies macht man in drei Schritten:

Zunächst ermittelt man die Menge $\mathbb{H} := \mathbb{H}(\mathfrak{G})$ aller (vollständig) einfachen Unterhalbgruppen $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$.

Danach stellt man jedes $\mathfrak{P} \in \mathbb{H}$ als eine Rees-Halbgruppe $G \times A \times B$ ($\cong \mathfrak{P}$) auf einer geeigneten (endlichen) Gruppe $G := G(\mathfrak{P})$ dar. [siehe Kap. II, § 1.9].

Schließlich bestimmt man die Menge $\mathfrak{N} := \mathfrak{N}(G(\mathfrak{P}))$ aller Normalteiler N der Gruppe $G(\mathfrak{P})$.

Nach Kap. II, Satz 2.2 ist die Menge Γ_N, $N \in \mathfrak{N}$

$$(1)\quad \Gamma_N := \left\{ \mu \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G}) : \mu \cong (\varepsilon_g * \omega_N) \circ \xi \circ \zeta \ ; \ g \in G(\mathfrak{P}) \right\}$$

eine Gruppe von Maßen in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$.
Folglich ist die Menge Γ aller Gruppen von Maßen in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$ durch

$$\Gamma = \left\{ \Gamma_N \text{ wie in (1) : } N \in \mathfrak{N}(G(\mathfrak{P})) \text{ und } \mathfrak{P} \in \mathbb{H}(\mathfrak{G}) \right\}$$

gegeben.

Die gesuchte Menge $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ erhält man schließlich als homomorphes Bild von Γ unter der Resultanten R.

4.6 SATZ: Die Menge $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ aller Gruppen in $\mathfrak{H}$ ist genau dann endlich, wenn die R-Bilder der normierten Haar-Maße derjenigen Gruppen, die in der Zerlegung von jeder (vollständig) einfachen Unterhalbgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ auftreten, identisch sind.

Insbesondere ist also $\mathfrak{G}$ endlich, wenn:
(α) jede (vollständig) einfache Unterhalbgruppe von $\mathfrak{G}$ eine Gruppe ist, oder falls
(β) $\mathfrak{G}$ selbst eine Gruppe bildet.

Beweis: Es gelte, daß für jede einfache Unterhalbgruppe $\mathfrak{P} = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{g}_{ij}$ von $\mathfrak{G}$ die R-Bilder der Haar-Maße $\omega_{\mathfrak{g}_{ij}}$ für alle $i=1,2,\ldots,r$ und $j=1,2,\ldots,s$ übereinstimmen.
Dann ist wegen Korollar 2.3 die Anzahl der Elemente der Menge $\mathfrak{J}$ aller Idempotenten in $\mathfrak{H}$ kleiner oder gleich der

Anzahl aller einfachen Unterhalbgruppen, welche in $\mathfrak{G}$ enthalten sind.
Folglich ist $\mathfrak{J}$ endlich.
Sei $\mathfrak{H}(A)$ die größte Gruppe in $\mathfrak{T}$ mit Einselement $A \in \mathfrak{J}$.
Nach Satz 4.3 ist $\mathfrak{H}(A)$ endlich. Somit ist auch $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\mathfrak{T})$ endlich.

Umgekehrt: Nehmen wir an, daß eine einfache Unter-$\mathfrak{P} = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{H}_{ij}$ in $\mathfrak{G}$ existiert derart, daß für ein Paar von Gruppen $\mathfrak{H}_{ij}$ und $\mathfrak{H}_{k\ell}$ $R(\omega_{\mathfrak{H}_{ij}}) \neq R(\omega_{\mathfrak{H}_{k\ell}})$ gilt.

Nach Korollar 2.3 gehören die Matrizen $R(\mu_\lambda)$ für $\mu_\lambda = \mu_\lambda^{(i,j,k,\ell)} := \lambda\omega_{\mathfrak{H}_{ij}} + (1-\lambda)\,\omega_{\mathfrak{H}_{k\ell}}$ $(\lambda \in [0,1])$ zu $\mathfrak{J}$.
Wegen $R(\omega_{\mathfrak{H}_{ij}}) \neq R(\omega_{\mathfrak{H}_{k\ell}})$ gilt daher $R(\mu_\lambda) \neq R(\mu_\rho)$ für alle $\lambda, \rho \in [0,1]$ mit $\lambda \neq \rho$.
Also ist $\mathfrak{J}$ unendlich und somit auch $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\mathfrak{T})$.

4.7 BEISPIELE:

1. Sei $\mathfrak{T} := \mathfrak{D}(2)$
   Dann ist die Menge $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\mathfrak{D}(2))$ endlich; denn es gilt: $\mathfrak{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, und $\mathfrak{G}$ bildet selbst eine Gruppe [vgl. Satz 4.6].
   Es sei angemerkt, daß in $\mathfrak{D}(2)$ wegen Korollar 2.3 nur zwei Idempotente existieren, nämlich $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

2. Sei $\mathfrak{T} := \mathfrak{P}(3)$
   Dann ist die Menge $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\mathfrak{P}(3))$ unendlich.
   Es gilt $\mathfrak{G} = \left\{ \begin{matrix} a,b,c, & d,f,e, & g,h,i, \\ j,k,\ell, & m,n,p, & q,r,s, \\ t,u,v, & w,x,y, & \gamma,\iota,\delta. \end{matrix} \right\} = \mathbf{F}(3)$
   und $\mathfrak{J} = \left\{ \begin{matrix} a,c, & d,f,e, & i, & n,p, & y, & \delta \end{matrix} \right\}$.

$$a := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad d := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad g := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad f := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad h := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad e := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad i := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$j := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad m := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad q := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad r := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$l := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad p := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad s := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad w := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad x := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varphi := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \delta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Man betrachtet nun die Teilmenge $\mathfrak{P} := \{a,n,\delta\}$ von $\mathfrak{G}$.

Es gilt

	a	n	δ
a	a	n	δ
n	a	n	δ
δ	a	n	δ

und somit $\mathfrak{P}\,a\,\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\,n\,\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\,\delta\,\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$.
Nach Kap. II, § 1.8 ist also $\mathfrak{P}$ eine (vollständig) einfache Unterhalbgruppe von $\mathfrak{G}$, und zwar die disjunkte Vereinigung der paarweise isomorphen Gruppen $\{a\}$, $\{n\}$ und $\{\delta\}$.
Nun gilt $R(\varepsilon_a) \neq R(\varepsilon_n) \neq R(\varepsilon_\delta)$, und daher ist wegen Satz 4.6 $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\mathfrak{P}(3))$ unendlich.

3. Sei wiederum $\mathfrak{T} := \mathfrak{P}(3)$
Dann existieren in $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}(3)$ (vollständig) einfache Unterhalbgruppen $\mathfrak{P} = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{g}_{ij}$, wie zum Beispiel die Gruppen $\{e, h, \ell, q, u, w\}$, $\{c,\gamma\}$, $\{d,k\}$, $\{p,\beta\}$, welche konstante R-Bilder der Haar-Maße $\omega_{\mathfrak{g}_{ij}}$ für alle $i=1,2,\ldots,r$ und $j=1,2,\ldots,s$ besitzen.
Trotzdem ist die Menge $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(3))$ unendlich [vgl. Satz 4.6 und Beispiel 2].

IV. UNENDLICH TEILBARE ELEMENTE EINER EXTREMALENDLICHEN HALBGRUPPE

§1. KENNZEICHNUNG DER UNENDLICH TEILBAREN WAHRSCHEINLICHKEITSMAßE AUF EINER ENDLICHEN HALBGRUPPE

1.1 LEMMA: Sei K eine kompakte, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$ mit endlicher Extremalpunktmenge $\mathfrak{k}(K)$.
Dann ist $F := \bigcup \{ \lambda K : \lambda \geq 0 \}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Aus der Endlichkeit von $\mathfrak{k}(K)$ folgt, daß sich der Rand ∂K von K aus Teilmengen $H_1, H_2, \ldots, H_k$ von endlich vielen Hyperebenen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ des $\mathbb{R}^n$ zusammensetzt.
Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

(α) $0 \in \overset{\circ}{K}$; (β) $0 \in \partial K$ und (γ) $0 \in \complement_{\mathbb{R}^n} K$.

Ad (α): Der Beweis des ersten Falles ist trivial, weil die Vereinigung aller λK mit $\lambda \geq 0$ den ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ aufspannt.

Ad (β): O.B.d.A sei $0 \in \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ und $0 \in \complement_{\mathbb{R}^n} \left(\bigcup_{i=p+1}^{k} H_i \right)$ $(1 < p < k)$.

Es gilt offenbar $A := \bigcup_{i=1}^{p} H_i = \{ x \in K : \alpha x \in \partial K \text{ für alle } \alpha \in [0,1] \}$.

Wir werden nun zeigen, daß $B (:= \bigcup_{\xi \geq 0} \xi A) = \partial F$ gilt,

und ferner, daß aus $B = \partial F$ die Vollständigkeit (also die Abgeschlossenheit) der Teilmenge F des vollständigen Raumes $\mathbb{R}^n$ folgt.

Sei also $y \in B \setminus \{0\}$, d.h., $y = \xi_0 x$ für ein $\xi_0 > 0$ und ein $x \in A$.
Ferner seien $\zeta_0 := \inf \{ \zeta \in [0,1] : x \in \zeta(\partial K) = \partial(\zeta K) \}$ und $\beta := \xi_0 \zeta_0$.

Es folgt $y = \xi_0 x \notin \partial(\xi_0 \delta K)$ für alle $\delta < \zeta_0$

und $y \in (\xi_0 \delta K)$ für alle $\delta \geq \zeta_0$.

Also $y \in \bigcap_{\lambda \geq \beta} \partial(\lambda K)$ und daher $y \in \partial F$.

[Wäre $y \in \overset{\circ}{F}$ $(F = \bigcup_{\lambda \geq \beta} \lambda K)$, dann existierte ein $\lambda_0 \geq \beta$, so daß $y \in \lambda_0 \overset{\circ}{K}$, was im Widerspruch zu $y \in \bigcap_{\lambda \geq \beta} \partial(\lambda K)$ steht.]

Andererseits gilt wegen der Voraussetzung $0 \in \bigcap_{\vartheta \geq 0} \partial(\vartheta K)$, und daher folgt wiederum $0 \in \partial F$.
Zusammengefaßt gilt also: (1) $\quad B \subset \partial F$.

Sei nun $y \in F \setminus B$. Dann gilt $y = \xi_0 x$ entweder für ein $\xi_0 \succ 0$ und ein $x \in \mathring{K}$ oder für ein $\xi_0 \succ 0$ und ein $x \in \bigcup_{i=p+1}^{k} H_i$.

Im ersten Fall gilt $y \in \xi_0 \mathring{K} \subset \mathring{F}$, im zweiten $y \in \xi_0 H_q$ für ein geeignetes q $(p+1 \leqq q \leqq k)$, und daher $y \in (\xi_0+1)\mathring{K} \subset \mathring{F}$.
Folglich gilt: (2) $\quad F \setminus B \subset \mathring{F} \subset F \setminus \partial F$

Aus (1) und (2) erhält man schließlich die Relation $B = \partial F$.

Um die Vollständigkeit von F nachzuweisen, betrachten wir eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in F mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in \mathbb{R}^n$.

Ist $x = o$, dann gehört x zu K und erst recht zu F.
Ist $x \neq o$, dann gilt entweder $x \in \mathring{F}$ (und erst recht $x \in F$) oder $x \in \partial F$.
Im zweiten Fall gilt wegen $B = \partial F$: Es existiert ein $\xi_0 \succ 0$, so daß x zu $\xi_0 A$ gehört; also $x \in \xi_0(\partial K) \subset \xi_0 K$ (denn K ist kompakt) und erst recht $x \in F$.
Folglich gehört x stets zu F, was die Vollständigkeit von F beweist.

Ad (γ): Der letzte Fall läßt sich auf den Beweis des Falles (β) zurückführen, denn für $L := \mathfrak{k}(\{o\} \cup K)$ gilt: $0 \in \partial L$ und $F = \bigcup \{\vartheta K : \vartheta \succeq o\} = \bigcup \{\vartheta L : \vartheta \succeq o\}$.

1.2 BEMERKUNG: Die Voraussetzung der Endlichkeit der Menge $\mathfrak{k}(K)$ kann im Falle $o \in \mathfrak{k}(K)$ $(\subset \partial K)$ nicht ersatzlos gestrichen werden. Dies erläutert folgendes Gegenbeispiel:
Sei $K := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1-x_1)^2+x_2^2 \leqq 1\}$.
Es ist klar, daß $F := \{\vartheta(x_1,x_2) : \vartheta \succeq o;\ (x_1,x_2) \in K\} =$
$= \{(o,o)\} \cup \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \succ o\}$.
Somit ist F weder abgeschlossen noch offen in $\mathbb{R}^2$.

Im folgenden sei $\mathfrak{H}$ stets eine endliche Halbgruppe.

1.3 DEFINITION: Ein Element $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ heißt unendlich teilbar, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\mu_n \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ mit der Eigenschaft $(\mu_n)^n (:= \mu_n \mu_n \cdots \mu_n$, n-mal) $= \mu$ existiert.

1.4 LEMMA: Sei $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ unendlich teilbar.
Dann existiert für ein vorgegebenes $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(\mu_n)_{n \geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ von Wurzeln von μ mit der Eigenschaft: $\mu = \mu_0$ und $(\mu_n)^k = \mu_{n-1}$ für alle $n = 1,2,\ldots$

Beweis: O.B.d.A. sei $o(\mathfrak{H}) \geq 2$.
Die Menge $\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ ist bzgl. der Normtopologie kompakt, und somit ist nach dem Satz von Tychonoff das nicht-leere topologische Produkt $Z := \prod_{i=0}^{\infty} Z_i$, wobei Z_i für $i=0,1,2,\ldots$ die Menge $\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ darstellt, bzgl. der Produkttopologie auch kompakt.
Andererseits existiert nach Voraussetzung zu jedem $m \geq 0$ eine k^m-Wurzel ν_m von μ, d.h., $\nu_m^{k^m} = \mu$.

Man betrachtet die Teilmengen $A_m \subset Z$, definiert durch
$A_m := \left\{\nu_m^{k^m}\right\} \times \left\{\nu_m^{k^{m-1}}\right\} \times \left\{\nu_m^{k^{m-2}}\right\} \times \cdots \times \left\{\nu_m^{k}\right\} \times \left\{\nu_m\right\} \times \prod_{j=m+1}^{\infty} Z_j$
für alle $m=0,1,2,\ldots$, und setzt $F_i := \bigcup_{\ell=i}^{\infty} A_\ell$, $i=0,1,2,\ldots$.
Offenbar bildet das Mengensystem $\mathfrak{F} = \{F_0, F_1, F_2, \ldots\} \subset \mathfrak{P}(Z)$ eine Filterbasis auf Z.

Sei nun $[\mathfrak{F}]$ der von $\mathfrak{F}$ erzeugte Filter auf Z.
Wegen der Kompaktheit von Z besitzt $[\mathfrak{F}]$ mindestens einen Häufungspunkt, etwa $\gamma = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots) \in Z$.
Nun ist ein Punkt $\gamma \in Z$ genau dann Häufungspunkt eines Filters auf Z mit Basis $\mathfrak{F}$, wenn γ Berührungspunkt jeder Menge aus $\mathfrak{F}$ ist. Folglich gehört $\gamma = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots)$ zum Abschluß $\overline{F_i}$ für alle $i=0,1,2,\ldots$, d.h., $\gamma = \lim_{\alpha \in \mathfrak{I}} \gamma_\alpha$ für ein Netz $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}}$ in F_i $\left(\gamma_\alpha = (\gamma_0^{(\alpha)}, \gamma_1^{(\alpha)}, \gamma_2^{(\alpha)}, \ldots)\right)$.

Nun gilt für jedes $f=(f_0,f_1,f_2\ldots) \in F_n$ mit festem $n\in\mathbb{N}$ wegen der Konstruktion der Menge F_n : $f_0=\mu$ und $(f_n)^k = f_{n-1}$. Folglich gilt $\gamma_0^{(\alpha)} = \mu$ und $(\gamma_n^{(\alpha)})^k = \gamma_{n-1}$ für alle $n = 1,2,\ldots$ und daher $\mu_0 = \operatorname{Lim}_{\alpha\in\mathcal{J}} \gamma_0^{(\alpha)} = \mu$ und $(\mu_n)^k = \operatorname{Lim}_{\alpha\in\mathcal{J}}(\gamma_n^{(\alpha)})^k = \operatorname{Lim}_{\alpha\in\mathcal{J}}(\gamma_{n-1}^{(\alpha)}) = \mu_{n-1}$ für alle $n=1,2,\ldots$, was den Beweis des Lemmas erbringt.

1.5 LEMMA: Sei $\mu\in\mathcal{M}^1(\mathcal{J})$ unendlich teilbar. Ferner sei $(\mu_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Wurzeln von μ, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) Es existiert ein idempotentes Maß $\varepsilon(=\varepsilon^2)\in\mathcal{M}^1(\mathcal{J})$, derart, daß $\mu_n \in \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathcal{J})\varepsilon$ für alle $n=1,2,\ldots$ und $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \| \mu_n - \varepsilon \| = 0$ gilt.

(ii) Es existiert eine Folge $(k_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{N}$ mit $k_n\geq 2$, so daß $(\mu_{n+1})^{k_n} = \mu_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ ist.

Dann existieren ein $\nu\in\varepsilon\mathcal{M}^1(\mathcal{J})\varepsilon$ und eine Konstante $\alpha\in\mathbb{R}_+$, so daß $\mu = \exp_\varepsilon\left[\alpha(\nu-\varepsilon)\right]$ gilt.

Beweis: Wegen (i) existiert ein $n_0\in\mathbb{N}$ derart, daß $\| \mu_n - \varepsilon \| < \frac{1}{3}$ für alle $n\geq n_0-1$ gilt.

Folglich gilt wegen (ii) $\| \mu_n^{k_{n-1}} - \varepsilon \| + 2 \| \mu_n - \varepsilon \| < 1$ für alle $n\geq n_0$.

Nach Kap. II, § 2.6 gilt also für jedes $n\geq n_0$ $\ell n_\varepsilon (\mu_n)^\ell = \ell \cdot \ell n_\varepsilon (\mu_n)$ für alle $\ell = 1,2,\ldots,k_{n-1}$.

Nun definiert man für das obige feste n_0 $\xi := \alpha_{n_0} \ell n_\varepsilon (\mu_{n_0})$, wobei $\alpha_n := k_1 \cdot k_2 \ldots k_{n-1}$ für alle $n\geq 1$ definiert ist.

Es folgt $\mu_{n_0} = \exp_\varepsilon \frac{1}{\alpha_{n_0}} \xi$

und ferner wegen $\mu_{n_0+1}^{k_{n_0}} = \mu_{n_0}$: $k_{n_0} \ell n_\varepsilon (\mu_{n_0+1}) = \ell n_\varepsilon (\mu_{n_0}) =$

$= \frac{1}{\alpha_{n_o}} \xi$, also $\ell n_\varepsilon \mu_{n_o+1} = \frac{1}{\alpha_{n_o+1}} \xi$ ..

Durch Induktion nach $l = 0,1,2,\ldots$ erhält man folglich

(1) $\ell n_\varepsilon \ (\mu_{n_o+l}) = \frac{1}{\alpha_{n_o+l}} \xi$.

Man definiert jetzt die stetige Abbildung

$t \longmapsto \nu_t := \exp_\varepsilon (t\xi)$ von $\mathbb{R}_+$ in $\mathcal{M}^b(\mathfrak{H})$ und zeigt

$\nu_t \in \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Wegen (1) gilt $\mu_n = \exp_\varepsilon \frac{1}{\alpha_n} = \nu_{\frac{1}{\alpha_n}}$ für alle $n \geq n_o$,

also $\nu_{\frac{1}{\alpha_n}} \in \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon$ für alle $n \geq n_o$.

Ferner gilt $\nu_{\frac{p}{\alpha_n}} = (\nu_{\frac{1}{\alpha_n}})^p = (\mu_n)^p$ und somit $\nu_{p/\alpha_n} \in \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon$

für alle $p \in \mathbb{N}$ und $n \geq n_o$.

Es bleibt anzumerken, daß die Menge $\left\{ \frac{p}{\alpha_n} \in \mathbb{Q} : p \in \mathbb{N},\ n \geq n_o \right\}$

in $\mathbb{R}_+$ dicht liegt (denn $\lim_{n\to\infty} 1/\alpha_n = 0$).

Folglich gehört ν_t zu $\varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Aus der Definition von ν_t $(t \in \mathbb{R}_+)$ folgt unmittelbar

$\lim_{t \downarrow o} \frac{1}{t}(\nu_t - \varepsilon) = \xi$.

Um die gewünschte Gestalt von μ zu gewinnen, brauchen wir also nur zu zeigen, daß die Menge $F := \bigcup \{ \lambda(\ \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon - \varepsilon) : \lambda \geq o \}$ abgeschlossen in $\mathcal{M}^b(\mathfrak{H})$ ist.

$\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ ist aber eine E-Halbgruppe [vgl. Kap. III, § 1.2(ε)], und somit ist wiederum nach Kap. III, § 1.6 $\varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon$ eine konvexe, kompakte Halbgruppe mit (Einselement ε und) endlicher Extremalpunktmenge.

Da ferner die Abbildung $\pi \longmapsto \pi - \varepsilon$, definiert für alle $\pi \in \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon$, eine stetige Translation von $\varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon$ ist,

stellt sich die Menge $\varepsilon\mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon - \varepsilon$ als konvex und kompakt heraus.
Aus der Bijektivität der obigen Abbildung folgt nun, daß die Extremalpunktmenge von $\varepsilon\mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon - \varepsilon$ ebenfalls endlich ist.
Nach Lemma 1.1 ist also F abgeschlossen in $\mathfrak{M}^\beta(\mathfrak{H})$.

Folglich ist $\xi (= \operatorname{Lim}_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(\nu_t - \varepsilon))$ von der Gestalt $\xi = \alpha(\nu - \varepsilon)$ für ein gewisses $\nu \in \varepsilon\mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon$ und eine gewisse Konstante $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Schließlich erhält man aus $\mu = \mu_{n_o}^{k_1 k_2 \cdots k_{n_o-1}} = \mu_{n_o}^{\alpha n_o} = \exp_t \xi$ die Gleichung $\mu = \exp_t \left[\alpha(\nu - \varepsilon)\right]$, was den Beweis des Lemmas vervollständigt.

1.6 SATZ: Für jedes $\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})$ sind folgende Aussagen äquivalent: (i) μ ist unendlich teilbar.
(ii) μ ist ein (ε-) Poissonmaß.

Beweis: (ii) $\Longrightarrow$ (i) klar!
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Nach Kap. III, Korollar 4.2, läßt sich die Menge $\mathbb{\Gamma}$ aller Gruppen in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})$ (bzgl. der Ordnung der Gruppen $\Gamma \in \mathbb{\Gamma}$) in endlich viele Klassen zerlegen, etwa A_{q_i}, $i=1,2,\ldots \ell$ $(\ell \in \mathbb{N})$, wobei die Klasse A_{q_i} alle Gruppen $\Gamma \in \mathbb{\Gamma}$ mit $o(\Gamma) = q_i$ enthält.

Sei also $k := q_1 q_2 \cdots q_\ell$ $(k \in \mathbb{N})$.
Wegen Lemma 1.4 existiert für das oben definierte $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(\mu_n)_{n \geq o}$ in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{H})$ von Wurzeln von μ mit der Eigenschaft:

$$\mu = \mu_o \text{ und } (\mu_n)^k = \mu_{n-1} \text{ für alle } n = 1,2,\ldots$$

Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, daß eine Teilfolge von $(\mu_n)_{n \geq o}$ existiert, welche die Voraussetzungen des Lemmas 1.5 erfüllt:

Zunächst existiert wegen der (bzgl. der Normtopologie) Kompaktheit von $\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ eine konvergente Teilfolge $(\mu_{k_n})_{n\geq 0}$ von $(\mu_n)_{n\geq 0}$.

Sei $\quad p := \lim_{n\to\infty} \mu_{k_n} \quad (p \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{H}))$

Es läßt sich nun zeigen:

(α) $\quad p = p\varepsilon = \varepsilon p \quad$ für ein Idempotent $\varepsilon \in p\,\mathcal{M}^1(\mathfrak{H}) \cap \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})p$

(β) $\quad \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon = p\,\mathcal{M}^1(\mathfrak{H}) \cap \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})p$

(γ) $\quad p$ ist bzgl. des Einselements ε der Unterhalbgruppe $\varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon$ von $\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ invertierbar.

Ad (α): Sei $\nu_n := \mu_{k_n}$ für alle $n = 0,1,2,\ldots$

Wegen der Voraussetzung über die Folge $(\mu_n)_{n\geq 0}$ gibt es natürliche Zahlen $p_{n,\ell} \geq 2$ $(n \geq 0, \ell \geq 1)$, so daß

$$\nu_n = (\nu_{n+\ell})^{p_{n,\ell}}$$

für alle $n \geq 0$ und alle $\ell \geq 1$ gilt.

Man betrachte für festes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Gleichungen

$$\nu_n = \nu_{n+\ell}\,\nu_{n+\ell}^{p_{n,\ell}-1} = \nu_{n+\ell}^{p_{n,\ell}}\,\nu_{n+\ell}^{-1} \quad (\ell \geq 1).$$

Wegen der Kompaktheit von $\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$ kann man o.B.d.A. annehmen, daß die Folgen $((\nu_{n+\ell})^{p_{n,\ell}-1})_{\ell\geq 1}$ für alle $n \geq 0$ konvergieren.
Sei also

$$(1)\quad \xi_n := \lim_{\ell\to\infty} (\nu_{n+\ell})^{p_{n,\ell}-1} \quad (\xi_n \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})).$$

Es folgt $\quad \nu_n = p\xi_n = \xi_n p \quad$ für alle $n \geq 0$

und somit (2) $\nu_n \in p\,\mathcal{M}^1(\mathfrak{H}) \cap \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\,p$ für alle $n \geq 0$,

sowie $\quad (3)\ (\nu_{n+\ell})^{p_{n,\ell}-1} \in p\,\mathcal{M}^1(\mathfrak{H}) \cap \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\,p$

für alle $n \geq 0$ und $\ell \geq 1$.

Nun ist $p\,\mathcal{M}^1(\mathfrak{H}) \cap \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\,p$ kompakt, und wegen (1) und (3) erhält man folglich die Relation $\xi_n \in p\,\mathcal{M}^1(\mathfrak{H}) \cap \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\,p$ für alle $n \geq 0$.

Ferner kann man o.B.d.A. annehmen, daß $(\xi_n)_{n\geq 0}$ gegen ein $\varepsilon \in p\ \mathcal{M}^1(\mathfrak{J}) \cap \mathcal{M}^1(\mathfrak{J})\ p$ konvergiert.
Schließlich ergibt sich aus (2) durch den Grenzübergang $n \to \infty$

$$(4) \qquad p = p\varepsilon = \varepsilon p.$$

Es bleibt nur $\varepsilon = \varepsilon^2$ zu zeigen.
Wegen $\varepsilon \in p\ \mathcal{M}^1(\mathfrak{J}) \cap \mathcal{M}^1(\mathfrak{J})\ p$ existieren $\beta, \gamma \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{J})$, derart, daß $\varepsilon = p\beta\ (= \gamma p)$ gilt.

Folglich ist wegen (4) : $\varepsilon = p\beta = (\varepsilon p)\beta = \varepsilon(p\beta) = \varepsilon\varepsilon$, was den Beweis der Aussage (α) ergibt.

Ad (β): Sei $\pi \in \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{J})\varepsilon \iff \pi = \varepsilon\pi = \pi\varepsilon \iff$
$\iff \pi = (p\beta)\pi = \pi(\gamma p)$, d.h., $\pi \in p\ \mathcal{M}^1(\mathfrak{J}) \cap \mathcal{M}^1(\mathfrak{J})\ p$.
Umgekehrt sei $\pi \in p\ \mathcal{M}^1(\mathfrak{J}) \cap \mathcal{M}^1(\mathfrak{J})p$.
D.h. $\pi = p\nu = \xi p$ für geeignete $\nu, \xi \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{J})$. Wegen (4) gilt nun $\pi = p\nu = (\varepsilon p)\nu = \varepsilon\pi = \varepsilon(\xi p) = (\varepsilon\xi)(p\varepsilon) = \varepsilon\pi\varepsilon$, was $\pi \in \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{J})\varepsilon$ beweist.
Insbesondere gehört also p wegen (4) zu $\varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{J})\varepsilon$.

Ad (γ): Man definiert jetzt $d := \varepsilon\beta\varepsilon$, $f := \varepsilon\gamma\varepsilon$
$(d, f \in \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{J})\varepsilon)$ und zeigt mittels (4) $\varepsilon = pd = fp$, sowie $d = f$.

$$pd = p(\varepsilon\beta\varepsilon) = (p\varepsilon)(\beta\varepsilon) = (p\beta)\varepsilon = \varepsilon\varepsilon = \varepsilon$$
$$fp = (\varepsilon\gamma\varepsilon)p = (\varepsilon\gamma)(\varepsilon p) = \varepsilon(\gamma p) = \varepsilon\varepsilon = \varepsilon$$
$$d = \varepsilon d = (fp)d = f(pd) = f\varepsilon = f.$$

Man betrachtet nun die von $\{\varepsilon, p, p^{-1}(:=d)\}$ erzeugte Gruppe Γ in $\varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{J})\varepsilon$.
Nach Kap. III, Satz 4.1, ist Γ endlich, d.h. $q := o(\Gamma) \in \mathbb{N}$, und weiter gilt wegen der Definition von k $\frac{k}{q} =: r \in \mathbb{N}$.
Bekanntlich gilt $p^{o(\Gamma)} = \varepsilon$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty} (\nu_n)^{qr} = \varepsilon$.
Andererseits ist $\mu_{k_n - 1} = (\mu_{k_n})^k = (\nu_n)^{qr}$ für alle $n \geq 1$
und daher

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \| \mu_{k_n - 1} - \varepsilon \| = 0 \ .$$

Die Folge $(\mu_{k_n-1})_{n\geq 0}$ von Wurzeln von μ erfüllt also die Voraussetzungen (i) [wegen (2), (β) und (5)] und (ii) [als Teilfolge von $(\mu_n)_{n\geq 0}$ und wegen der Definition von $k(\in \mathbb{N})$] des Lemmas 1.5.
Folglich läßt sich μ als ein ε-Poissonmaß darstellen, d.h., $\mu = \exp_\varepsilon [\alpha(\nu-\varepsilon)]$ für ein $\nu \in \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathfrak{H})\varepsilon$ und eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

1.7 BEMERKUNG: Nach der obigen Charakterisierung der unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer endlichen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist klar, daß die Bestimmung der Menge $\{\mu \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{H}) : \mu \text{ unendlich teilbar}\}$ auf die Bestimmung der Menge aller idempotenten Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{H}$ zurückgeführt wird.
Dieses letzte Problem wurde von P. Martin-Löf in seiner Arbeit [19] im allgemeinen Rahmen der (nicht notwendig endlichen) diskreten Halbgruppen gelöst [siehe Kap. II, Satz 2.1].

§ 2. KENNZEICHNUNG DER UNENDLICH TEILBAREN ELEMENTE EINER E-HALBGRUPPE

Im folgenden seien stets $\mathfrak{H}$ eine E-Halbgruppe und $\mathfrak{G}$ die von $\mathfrak{l}(\mathfrak{H})$ erzeugte endliche Halbgruppe.

2.1 DEFINITION: Ein Element $A \in \mathfrak{H}$ wird unendlich teilbar genannt, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $A_k \in \mathfrak{H}$ existiert derart, daß $A = (A_k)^k$ gilt.

2.2 Für ein festes Idempotent $B \in \mathfrak{H}$ betrachten wir die Mengen

$$\mathfrak{R}_B := \left\{ A \in \mathfrak{H} \;:\; A = B\,A = A\,B \right\} = B\mathfrak{H}B$$

$$\mathfrak{T}_B := \left\{ A \in \mathfrak{R}_B \;:\; \|A - B\| < 1 \right\}$$

Die Funktionen

$$(1)\quad A \longmapsto \exp_B(A) := B + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \text{ von } \mathfrak{R}_B \text{ in } \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$$

und

$$(2)\quad A \longmapsto \ln_B(A) := -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(B-A)^k \text{ von } \mathfrak{T}_B \text{ in } \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$$

sind offenbar wohldefiniert.
Die erste heißt B-Exponentialfunktion und die zweite B-Logarithmusfunktion.

Man kann leicht die folgenden Eigenschaften der Funktionen (1) und (2) nachprüfen:

(i) Für alle $A \in \mathfrak{T}_B$ gilt $\exp_B(\ln_B A) = A$

(ii) Für alle $A \in \mathfrak{H}$ mit $\|A\| < \log 2$ gilt $\ln_B(\exp_B A) = A$ und $\|\exp_B(A) - B\| < 1$

(iii) Für alle $A_1, A_2 \in \mathfrak{R}_B$ mit $A_1A_2 = A_2A_1$
gilt $\exp_B(A_1+A_2) = \exp_B(A_1).\exp_B(A_2)$

(iv) Für alle $A_1, A_2 \in \mathfrak{R}_B$ mit $A_1A_2 = A_2A_1$
und $\|A_1-B\| + \|A_2-B\| + \|A_1-B\|\,\|A_2-B\| < 1$
gilt $\|A_1A_2 - B\| < 1$ und $\ln_B(A_1A_2) =$
$= \ln_B(A_1) + \ln_B(A_2)$

2.3 LEMMA: Für ein Idempotent $B \in \mathfrak{T}$ gilt stets

$$\left\{ \exp_B \left[\alpha(A-B)\right] : \alpha \in \mathbb{R}_+,\ A \in B\mathfrak{T}B \right\} \subset \mathfrak{T}$$

Beweis: $R^{-1}(\{B\})$ ist eine abgeschlossene (und somit kompakte) Halbgruppe in $\mathcal{M}^1(G)$. Nach Kap. II, § 1.10, existiert also ein $\varepsilon \in R^{-1}(\{B\})$ mit $\varepsilon = \varepsilon^2$, und weiter gibt es wegen $R(\mathcal{M}^1(G)) = \mathfrak{T}$ ein $\nu \in \mathcal{M}^1(G)$ mit $R(\nu) = A$.

Nach Kap. II, Satz 2.7 (ii), gehört nun $\exp_\varepsilon\left[\alpha(\mu-\varepsilon)\right]$ zu $\mathcal{M}^1(G)$ für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und $\mu := \varepsilon\nu\varepsilon$. Wegen $R(\mu) = R(\varepsilon)\,R(\nu)\,R(\varepsilon) = BAB = A$ und der Stetigkeit des Algebra-Homomorphismus (der Resultanten) R erhält man schließlich $R(\exp_\varepsilon\left[\alpha(\mu-\varepsilon)\right]) = \exp_B\left[\alpha(A-B)\right] \in \mathfrak{T}$.

2.4 LEMMA: Seien ε_1, ε_2 Idempotente einer abstrakten Halbgruppe $\mathfrak{H}$ und a, b_1, c_1, b_2, c_2 $\in \varepsilon_i \mathfrak{H} \varepsilon_i$ für i=1,2. Außerdem gelte $\varepsilon_1 = ab_1 = c_1a$ und $\varepsilon_2 = ab_2 = c_2a$. Dann folgt $b_1 = b_2 = c_1 = c_2$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Beweis:
$$\begin{aligned} c_1 &= c_1\varepsilon_1 = c_1(ab_1) = (c_1a)b_1 = \varepsilon_1 b_1 = \\ &= b_1 = \varepsilon_2 b_1 = (c_2a)b_1 = c_2(ab_1) = c_2\varepsilon_1 = \\ &= c_2 = c_2\varepsilon_2 = c_2(ab_2) = (c_2a)b_2 = \varepsilon_2 b_2 = \\ &= b_2. \end{aligned}$$

2.5 Auf der Menge $\mathcal{M}^1(G)$ betrachten wir nun die durch $(\mu,\nu) \in \mathcal{R} :\Longleftrightarrow R(\mu) = R(\nu)$ definierte Äquivalenzrelation $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}^1(G) \times \mathcal{M}^1(G)$.
Dabei bezeichne R die Resultante.
Bekanntlich bilden die Äquivalenzklassen $[\mu] := \left\{\nu \in \mathcal{M}^1(G) : R(\nu) = R(\mu)\right\} \left(\mu \in \mathcal{M}^1(G)\right)$ eine Zerlegung von $\mathcal{M}^1(G)$.

Die Menge $\mathfrak{A} := \left\{[\mu] : \mu \in \mathcal{M}^1(G)\right\}$ aller Äquivalenzklassen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf (der endlichen Halbgruppe) G wird mit einer multiplikativen Struktur versehen, welche durch die Festsetzung

$$(1)\quad [\mu]\cdot[\nu] := [\mu * \nu]$$

für alle $[\mu], [\nu] \in \mathfrak{A}$ gegeben wird.
[Dabei bezeichne μ bzw. ν einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[\mu]$ bzw. $[\nu]$.]
Es sei nun betont, daß die in $\mathfrak{A}$ durch (1) eingeführte multiplikative Operation wegen des algebraischen Isomorphismus $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{T}$ $(=R(\mathfrak{U}^1(\mathfrak{G})))$ [vgl. Kap. III, § 1.8(8)] wohldefiniert ist, und ferner, daß $\mathfrak{A}$ so die Struktur einer Halbgruppe erhält.
Schließlich sei hervorgehoben, daß im allgemeinen die durch (1) definierte multiplikative Operation "$\cdot$" auf $\mathfrak{A}$ nicht mit $[\mu] * [\nu] := \{ \mu * \nu : \mu \in [\mu], \nu \in [\nu] \}$ übereinzustimmen braucht, jedoch gilt stets $[\mu] * [\nu] \subset [\mu]\cdot[\nu]$.

2.6 DEFINITION: Eine Äquivalenzklasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen $[\mu]$ auf $\mathfrak{G}$ wird unendlich teilbar genannt, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Äquivalenzklasse $[\mu_n]$ mit der Eigenschaft $[\mu_n]^n$ $(:=[\mu_n]\cdot[\mu_n] \cdots [\mu_n]$, n-mal$) = [\mu]$ existiert.

2.7 VORBEMERKUNG: Nicht jeder Repräsentant einer unendlich teilbaren Äquivalenzklasse $[\mu]$ braucht notwendig unendlich teilbar zu sein. Dies hat schon S. Johansen in seiner Arbeit [13a] für den Spezialfall der endlichen Halbgruppe $\mathfrak{G} := \mathfrak{F}(n)$ der Extremalpunkte der konvexen, kompakten Menge aller stochastischen Matrizen in $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ angemerkt und für diesen Fall zugleich die folgende Kennzeichnung der unendlich teilbaren Äquivalenzklassen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathfrak{F}(n)$ bewiesen [siehe: [13a], Theorem 2.2]:
"Eine Äquivalenzklasse $[\mu]$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathfrak{F}(n)$ ist genau dann unendlich teilbar, wenn $[\mu]$ einen unendlich teilbaren Repräsentanten enthält."
Deren Beweis kann man leicht auf den Fall einer endlichen Halbgruppe $\mathfrak{G}$ übertragen.

2.8 SATZ: Für jedes $A \in \mathfrak{T}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist unendlich teilbar.

(ii) Es gibt ein Idempotent $B(=B^2) \in \mathfrak{T}$, ein $P \in B\mathfrak{T}B$ und eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}_+$, so daß $A = \exp_B [\alpha(P-B)]$ gilt.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $A \in \mathfrak{T}$ unendlich teilbar. Man betrachte die Äquivalenzklasse $[\mu] := \{\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{G}) : R(\mu) = A\}$. Nach § 2.5 ist $[\mu]$ ebenfalls unendlich teilbar.

Sei nun μ der nach Vorbemerkung § 2.7 stets existierende unendlich teilbare Repräsentant der Äquivalenzklasse $[\mu]$. Wegen Satz 1.6 ist μ ein $(\varepsilon-)$ Poissonmaß, d.h., $\mu = \exp_\varepsilon [\alpha(\nu-\varepsilon)]$ für ein idempotentes Maß $\varepsilon \in \mathcal{M}^1(\mathbb{G})$, ein $\nu \in \varepsilon\mathcal{M}^1(\mathbb{G})\varepsilon$ und eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}_+$ [siehe Kap. II, § 2.8].

Folglich ist $A = R(\mu) = R(\exp_\varepsilon [\alpha(\nu-\varepsilon)])$ und weiter wegen der Stetigkeit des Algebra-Homomorphismus der Resultanten R $\quad A = \exp_{R(\varepsilon)} [\alpha(R(\nu)-R(\varepsilon))]$.

Wenn man $B := R(\varepsilon)$ und $P := R(\nu)$ setzt, bleibt nur noch zu beachten, daß sowohl $B = B^2$ als auch $P = BPB$ gilt.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Seien $A \in \mathfrak{T}$, $A = \exp_B [\alpha(P-B)]$ und $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Man definiert $A_k := \exp_B [\frac{\alpha}{k}(P-B)]$ und bemerkt, daß nach Lemma 2.3 A_k zu $\mathfrak{T}$ gehört, sowie $(A_k)^k = A$ gilt. Damit ist A unendlich teilbar in $\mathfrak{T}$.

2.9 KOROLLAR [Satz von J.F.C. Kingman]:
Eine nicht-singuläre, stochastische (bzw. doppelt stochastische) Matrix A ist genau dann unendlich teilbar, wenn eine Intensitätsmatrix (bzw. starke Intensitätsmatrix) Q existiert, derart, daß $A = \exp_I Q$ gilt.

Beweis: Nach Voraussetzung ist die Determinante von A verschieden von Null, was für das Idempotent $B \in \mathbb{P}(n)$ (bzw. $B \in \mathbb{D}(n)$) in der Darstellung $A = \exp_B [\alpha(P-B)]$ $B = I$ (:= Einheitsmatrix) impliziert.

2.10 BEMERKUNG: Mit Hilfe der Beweismethode von J.F.C. Kingman kann man die folgende Verallgemeinerung des Korollars 2.9 gewinnen:

"Eine nicht-singuläre, substochastische Matrix $A(\in \mathfrak{S}(n))$ ist genau dann unendlich teilbar, wenn eine Subintensitätsmatrix Q existiert, derart, daß $A = \exp_I Q$ gilt."
Die Beweismethode von Kingman erlaubt es jedoch nicht, die Menge aller (singulären oder nicht-singulären) unendlich teilbaren, substochastischen Matrizen zu kennzeichnen.

2.11 EINDEUTIGKEIT DER DARSTELLUNG $A = \exp_B[\alpha(P-B)]$ EINES UNENDLICH TEILBAREN ELEMENTS A EINER E-HALBGRUPPE:

(α) Für ein unendlich teilbares $A \in \mathfrak{T}$ ist das Idempotent B in der Darstellung $A = \exp_B[\alpha(P-B)]$ wegen der Lemmata 2.3 und 2.4 eindeutig bestimmt.
[A ist in der Halbgruppe $B\,\mathfrak{T}\,B$ invertierbar bzgl. des Idempotents B.]

(β) Die Matrix $Q := \alpha(P-B)$ ist jedoch in der Darstellung $A = \exp_B[\alpha(P-B)]$ im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, selbst nicht in dem einfachen Falle $\mathfrak{T} := \mathfrak{P}(3)$. J.M.O. Speakman hat nämlich ein Beispiel dafür gebracht, daß ein unendlich teilbares $A \in \mathfrak{P}(3)$ durch zwei verschiedene Intensitätsmatrizen Q_i $(i=1,2)$ dargestellt werden kann [siehe [29]].
Einige Resultate über die Eindeutigkeit der Darstellung $A = \exp_I[\alpha(P-I)]$ kann man für den Spezialfall von stochastischen Matrizen in den Arbeiten [8a] und [8b] von J.R. Cuthbert finden.

(γ) Es sei angemerkt, daß für ein unendlich teilbares Element $A \in \mathfrak{T}$ das unendlich teilbare Maß $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ mit $R(\mu) = A$ nicht eindeutig bestimmt ist.
Dies zeigt das schon für den Beweis der Nicht-Injektivität der Resultante ausgenützte Beispiel von Kap. III, § 1.8.

2.12 DEFINITION: Ein Element $A \in \mathfrak{T}$ wird einbettbar genannt, wenn es ein Idempotent $B(=B^2) \in \mathfrak{T}$ und eine stetige Halbgruppe $\{A(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ in $\mathfrak{T}$ mit den Eigenschaften $A(1) = A$ und $A(o) = B$ gibt.

2.13 SATZ: Für jedes $A \in \mathfrak{T}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist einbettbar.

(ii) A ist unendlich teilbar.

<u>Beweis :</u> (i) $\Longrightarrow$ (ii) : Ist $A \in \mathfrak{T}$ einbettbar in die stetige Halbgruppe $\{A(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ in $\mathfrak{T}$, dann gilt $(A(\frac{1}{k}))^k = A$, und A ist unendlich teilbar.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Ist nun $A \in \mathfrak{T}$ unendlich teilbar, dann ist A gemäß Satz 2.8 von der Gestalt $A = \exp_B [\alpha(P-B)]$. Die Abbildung $t \longmapsto A(t) := \exp_B [t\alpha(P-B)]$ von $\mathbb{R}_+$ in $\mathfrak{T}$ ist offenbar ein stetiger Homomorphismus mit den Eigenschaften $A(1) = A$ und $A(0) = B$.
Folglich ist A in die stetige Halbgruppe $\{A(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ einbettbar.

V. GRENZWERTSÄTZE FÜR EXTREMAL-ENDLICHE HALBGRUPPEN

§ 1. LIMITEN KOMMUTATIVER, INFINITESIMALER DREIECKSSYSTEME IN EINER E-HALBGRUPPE.

1.1 Eine Familie $\vartheta := \{P_{m,k} \in \mathfrak{H} : m = 1,2,\ldots;\ k = 1,2,\ldots,k(m)\}$ bezeichnen wir fortan als Dreieckssystem in $\mathfrak{H}$.

Mit $P_m := \prod_{k=1}^{k(m)} P_{m,k}$ bezeichnen wir weiter das m-te Reihenprodukt von ϑ.

1.2 DEFINITIONEN:

1. Ein Dreieckssystem ϑ heißt B-infinitesimal (bzgl. eines Idempotenten $B \in \mathfrak{H}$), wenn gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{1\le k\le k(m)} \| P_{m,k} - B \| = 0$$

2. ϑ heißt konvergent mit Limes A ($\in \mathfrak{H}$), wenn $\lim_{m\to\infty} P_m$ existiert und $A = \lim_{m\to\infty} P_m$ ist.

3. ϑ wird kommutativ genannt, wenn für jedes m $P_{mi} P_{mj} = P_{mj} P_{mi}$ für alle i,j = 1,2,...,k(m) gilt.

Das folgende Lemma, auf das wir den Beweis des Satzes 1.4 stützen werden, ist in der Arbeit [5] von H. Carnal als Korollar 1 des Lemmas 2 ohne Beweis angegeben. Ein Beweis soll an dieser Stelle nachgetragen werden.

1.3 LEMMA: Sei $(x_i)_{i=1,2,\ldots,k}$ ($k \in \mathbb{N}$) eine endliche Folge in $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) mit der Eigenschaft $\|x_i\| < \varepsilon$, i=1,2,...,k für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu jedem $p \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung der Menge $K := \{1,2,\ldots,k\}$ in p disjunkte Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_p$, derart, daß

$$\Big\| \sum_{i\in A_r} x_i - \sum_{i\in A_s} x_i \Big\| < c\varepsilon \quad \text{für alle } r,s=1,2,\ldots,p$$

gilt.

Dabei ist $c := c(n,p)$ eine positive Konstante, die nur von n und p abhängt.

Beweis: Sei $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^n$ definiert durch $f(c_1,c_2,\ldots,c_k) := \sum_{i\in K} c_i x_i$ für alle $c = (c_1,c_2,\ldots,c_k) \in \mathbb{R}^k$.

Weiter sei $\mathfrak{B} := f([0,1]^k)$.

Für festes $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b} \neq 0$ definieren wir

$A_{\mathfrak{b}} := \left\{ c \in [0,1]^k : f(c) = \mathfrak{b} \right\}$.

$A_{\mathfrak{b}}$ ist offenbar nicht-leer, konvex und abgeschlossen und besitzt somit mindestens einen Extremalpunkt $a = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k) \in \mathbb{R}^k$.

Im Beweis von [5], Lemma 2 bzw. [11b], Lemma 6.6.2 wird gezeigt, daß a höchstens $n(n \leq k)$ von 0 und 1 verschiedene Koordinaten besitzt.

Also gilt für $A := \left\{ i \in K : \alpha_i = 1 \right\}$:

$$(1) \quad \left\| \sum_{i\in A} x_i - b \right\| = \left\| \sum_{i\in A} x_i - f(a) \right\| = \left\| \sum_{\alpha_i \in]0,1[} \alpha_i x_i \right\| < n\varepsilon$$

Es sei jedoch hervorgehoben, daß die extremen Fälle $A = K$ sowie $A = \emptyset$ nicht ausgeschlossen sind.

Mittels vollständiger Induktion, unter sukzessive Anwendung dieser Aussage, läßt sich nun das Lemma zeigen.

Zunächst führen wir für jedes $A \subset K$ die Bezeichnungen $\mathfrak{A} := \sum_{i\in A} x_i$, $\mathfrak{K} := \sum_{i\in K} x_i$ ein, und definieren $\sum_{i\in\emptyset} x_i := 0$.

1. Fall: $p \geq k$. Dann läßt sich K folgendermaßen zerlegen: $A_i := \{x_i\}$ für alle $i = 1,2,\ldots,k$ und $A_i := \emptyset$ für alle $i = k+1,\ldots,p$. Somit ist die Konstante $c := c(n,p) = 2$.

2. Fall: $p < k$.

2a. $\sum_{i\in K} x_i = 0$. Man betrachtet die Zerlegung $A_1 := K$ und $A_i = \emptyset$ für alle $i = 2,3,\ldots,p$, und daher ist die Konstante $c := c(n,p) = 0$.

2b. $\sum_{i\in K} x_i \neq 0$.

Sei $p = 2$. Man wählt $\mathfrak{b} := \frac{1}{p}\mathfrak{K}$. Dann existiert $A_1 \subset K$, derart, daß $(2) \quad \left\| \mathfrak{A}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{K} \right\| < n\varepsilon$ erfüllt ist. Dann läßt sich K folgendermaßen zerlegen:

$A_1, A_2 := \int_K A_1$.

Da stets $\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{K} = \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{A}_2$ gilt, bekommt man aus (2):

$$\|\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2\| < 2n\varepsilon \quad .$$

Wir nehmen nun an, daß die Aussage des Lemmas für $\nu := p < k - 1$ gilt und zeigen, daß sie auch für $\nu := p + 1$ erfüllt ist.

Man wählt zunächst $\varepsilon := \frac{1}{p+1}\mathfrak{K}$. Dann existiert $A_1 \subset K$ mit

$$\|\mathfrak{A}_1 - \tfrac{1}{p+1}\mathfrak{K}\| < n\varepsilon .$$

Somit gilt mit $\mathfrak{A}_2^* := \sum_{i \in \int_K A_1} x_i$ die Aussage

$$(3) \quad \left\| \tfrac{p}{p+1}\mathfrak{A}_1 - \tfrac{1}{p+1}\mathfrak{A}_2^* \right\| < n\varepsilon .$$

Nach Induktionsvoraussetzung und unter Berücksichtigung des ersten Falles existiert eine Zerlegung der Menge $\int_K A_1$ in p disjunkte Teilmengen $A_2, A_3, \ldots, A_{p+1}$ derart, daß

$$(4) \quad \|\mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_j\| < c(n,p)\varepsilon$$

für alle $i,j=2,3,\ldots,p+1$ gilt. Also hat man für alle $i=2,3,\ldots,p+1$:

$$(5) \quad \left\| \tfrac{p}{p+1}\mathfrak{A}_i - \tfrac{1}{p+1}\mathfrak{A}_2 \right\| = \left\| \tfrac{1}{p+1} \sum_{j \in \{2,3,\ldots,p+1\} \setminus \{i\}} (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_j) \right\| \leq \tfrac{p-1}{p+1} c(n,p)\varepsilon .$$

Ferner gilt wegen (3) und (5) für alle $j=2,3,\ldots,p+1$:

$$\left\| \tfrac{p}{p+1}\mathfrak{A}_1 - \tfrac{p}{p+1}\mathfrak{A}_j \right\| \leq \left\| \tfrac{p}{p+1}\mathfrak{A}_1 - \tfrac{1}{p+1}\mathfrak{A}_2^* \right\| +$$

$$\left\| \tfrac{1}{p+1}\mathfrak{A}_2^* - \tfrac{1}{p+1}\mathfrak{A}_j \right\| \leq \left[n + \tfrac{p-1}{p+1} c(n,p) \right]\varepsilon \text{ und daher}$$

$$(6) \quad \|\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_j\| \leq \left[\tfrac{p+1}{p} n + \tfrac{p-1}{p} c(n,p) \right]\varepsilon .$$

Schließlich bekommt man für die Zerlegung $A_1, A_2, \ldots, A_{p+1}$ der Menge K aus (4) und (6)

$$\|\mathfrak{A}_i - \mathfrak{A}_j\| < c(n,p+1)\varepsilon \quad (i,j=1,2,\ldots,p+1)$$

mit den Konstanten $c(n,p+1) := \max\left\{ \tfrac{p+1}{p} n + \tfrac{p-1}{p} c(n,p),\ c(n,p) \right\}$.

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

1.4 SATZ: Es sei $\vartheta = \left\{ P_{mk} \in \mathfrak{H} : m=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots,k(m) \right\}$ ein kommutatives , B - infinitesimales, konvergentes Dreieckssystem mit Limes $A(\in \mathfrak{H})$, welches zusätzlich die Eigenschaft

(1) $P_{mk} = BP_{mk}B$ für alle $m=1,2,\ldots$ und $k=1,2,\ldots,k(m)$ besitzt.

Dann ist A unendlich teilbar.

Umgekehrt ist jedes unendlich teilbare Element A einer E-Halbgruppe $\mathfrak{H}$ Limes eines kommutativen, B-infinitesimalen Dreieckssystems ϑ in $\mathfrak{H}$, welches zusätzlich die Eigenschaft (1) besitzt.

Beweis: O.B.d.A kann man annehmen, daß für alle $m=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots,k(m)$ $R_{mk} := \ln_B P_{mk}$ existiert und $\lim_{m\to\infty} R_{mk} = 0$ gilt (ϑ ist B-infinitesimal und erfüllt (1)).

Ferner kann man o.B.d.A annehmen, daß für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gilt: $\| R_{mk} \| < \varepsilon$ für alle $m=1,2,\ldots$ und $k = 1,2,\ldots,k(m)$.

Wir identifizieren jetzt die Matrizen $R_{mk} = (r_{ij}^{(mk)})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ mit den Vektoren $R_{mk} := \left(r_{11}^{(mk)}, r_{12}^{(mk)}, \ldots, r_{1n}^{(mk)}, r_{21}^{(mk)}, \ldots, r_{nn}^{(mk)} \right) \in \mathbb{R}^{n^2}$ $(m=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots,k(m))$.

Wegen $\| R_{mk} \| < \varepsilon$ $(R_{mk} \in \mathbb{R}^{n^2})$ existiert nach Lemma 1.3 für vorgegebene $m \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung der Menge $\left\{ 1,2,\ldots,k(m) \right\}$ in p disjunkte Teilmengen $K_1, K_2, \ldots, K_p$ derart, daß

$$\left\| \sum_{k\in K_\alpha} R_{mk} - \sum_{k\in K_\beta} R_{mk} \right\| < c\varepsilon$$

für alle $\alpha, \beta = 1,2,\ldots,p$ gilt.

[Sind einige der Teilmengen K_i $(i=1,2,\ldots p)$ leer, dann definieren wir für $K_i = \emptyset$ $\sum_{i\in K_i} R_{mk} := 0$,

woraus $\prod_{i\in K_i} P_{mk} = \exp_B\left(\sum_{i\in K_i} \ln_B P_{mk}\right) =$

$= \exp_B\left(\sum_{i\in K_i} R_{m\,k}\right) = B$ folgt.]

Wir zeigen nun

(2) $\lim_{m\to\infty} \left\| \prod_{k\in K_\alpha} P_{mk} - \prod_{k\in K_\beta} P_{mk} \right\| = 0.$

Sei $\Phi := \prod_{k\in K_\alpha} P_{mk} - \prod_{k\in K_\beta} P_{mk} = \prod_{k\in K_\alpha} (\exp_B(\ln_B P_{mk})) -$

$- \prod_{k\in K_\beta} (\exp_B(\ln_B P_{mk})).$

Wegen der Kommutativität und der Eigenschaft (1) von ϑ erhält man

$$\Phi = \exp_B\left(\sum_{k\in K_\alpha} \ln_B P_{mk}\right)\left[\exp_B\left(\sum_{k\in K_\alpha} \ln_B P_{mk} - \sum_{k\in K_\beta} \ln_B P_{mk}\right) - B\right] =$$

$$= \left(\prod_{k\in K_\beta} P_{mk}\right)\left[\exp_B\left(\sum_{k\in K_\alpha} R_{mk} - \sum_{k\in K_\beta} R_{mk}\right) - B\right].$$

Aus der letzten Relation und der Konvergenz von ϑ ergibt sich (2).

Sei nun $Q_\alpha^{(m)} := \prod_{k\in K_\alpha} P_{mk}$, $\alpha = 1,2,\ldots,p$. Die Relation (2) läßt sich als

(3) $\lim_{m\to\infty} \left\| Q_\alpha^{(m)} - Q_\beta^{(m)} \right\| = 0 \quad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,p)$

umschreiben.

Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{V}$ kann man o.B.d.A. annehmen, daß $Q_\alpha := \lim_{m\to\infty} Q_\alpha^{(m)}$ $(\alpha = 1,2,\ldots,)$ existiert.

Weiter folgt wegen (3) : $Q := Q_\alpha = Q_\beta$ für alle $\alpha,\beta = 1,2,\ldots,p$.

Schließlich läßt sich der Limes A des kommutativen Dreieckssystems ϑ schreiben als

$$A = \lim_{m\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{k(m)} P_{mk} \right) = \lim_{m\to\infty} \left(\prod_{k\in A_1} P_{mk} \cdot \ldots \cdot \prod_{k\in A_p} P_{mk} \right) =$$

$$= Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_p = Q^p,$$

woraus die Unendlich-Teilbarkeit von A folgt.

Umgekehrt sei $A \in \mathfrak{T}$ unendlich teilbar.
Wegen Kap. IV, § 2.8 ist A von der Gestalt $A = \exp_B[\alpha(P-B)]$ für ein Idempotent $B \in \mathfrak{T}$, ein $P \in B\mathfrak{T}B$ und eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Man definiert

$$\mathfrak{D} := \left\{ P_{mk} := \exp_B\left[\frac{\alpha}{m}(P-B)\right] : m=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots,m. \right\}$$

[P_{mk} gehört wegen Kap. IV, § 2.3 für alle m=1,2,..., k=1,2,...,m zu $\mathfrak{T}$] und prüft nach, daß $\mathfrak{D}$ ein kommutatives, B-infinitesimales, konvergentes Dreieckssystem mit Limes A ist, welches zusätzlich die Eigenschaft $P_{mk} = B\,P_{mk}\,B$ für alle m=1,2,... und k=1,2,...,m erfüllt.

1.5 BEMERKUNG: Satz 1.4 charakterisiert die unendlich teilbaren Elemente einer E-Halbgruppe $\mathfrak{T}$ als Limiten kommutativer, (bzgl. eines Idempotents B-) infinitesimaler Dreieckssysteme $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{T}$ und verallgemeinert auf E-Halbgruppen den entsprechenden Satz von S. Johansen für die unendlich teilbaren Elemente der Halbgruppe aller nichtsingulären, stochastischen Matrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ [vgl. [13b], Theorem 2.10].

Wie wir schon in der Einleitung ausgeführt haben, ist die von S. Johansen angewandte Methode zum Beweis des Satzes 1.4 im spezialfall nicht-singulärer, stochastischer Matrizen für eine Verallgemeinerung nicht geeignet, selbst nicht für den Fall der Halbgruppe aller stochastischen Matrizen.

§ 2. KONVERGENZ DER FOLGE $(A^n)_{n\geq 1}$ IN EINER E-HALBGRUPPE

In diesem Paragraphen möchten wir die Konvergenz der Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ für ein Element A einer E-Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mittels hinreichender Bedingungen sicherstellen, welche sich auf die Trägermenge von A beziehen.

2.1 LEMMA: Sei $A \in \mathfrak{H}$ und sei P_A das Idempotent aus $\Gamma(A) := \{A^n : n \geq 1\}$. Dann existiert zu jedem Träger $\mathfrak{h}(A)$ ein Paar von Maßen $(\mu, \xi) \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$ mit den Eigenschaften:

(i) $\operatorname{supp}(\mu) = \mathfrak{h}(A)$ und $R(\mu) = A$.

(ii) ξ ist das Idempotent aus $\Gamma(\mu)$ und $R(\xi) = P_A$.

Somit besitzt P_A den Träger $\mathfrak{h}(P_A) = \operatorname{supp}(\xi)$.

Beweis: Sei $\mathfrak{h}(A) = \{S_1, S_2, \ldots, S_\ell\}$ $(\subset \mathfrak{G})$. Dann existieren $\lambda_i > 0$ mit $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1$, so daß $A = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i S_i$ gilt.

Somit besitzt $\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$, $\mu := \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \varepsilon_{S_i}$ die Eigenschaft (i).

Da $\xi \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$ das Idempotent aus $\Gamma(\mu) := \overline{\{\mu^n : n \geq 1\}}$ ist, folgt $R(\xi) = (R(\xi))^2$ sowie $R(\xi) \in \Gamma(A)$. Also $R(\xi) = P_A$. ⌋

Im folgenden bezeichnen wir für jedes $A \in \mathfrak{H}$ mit P_A stets das Idempotent aus $\Gamma(A)$ und mit $\mathfrak{h}(P_A)$ den durch das Verfahren von Lemma 2.1 bestimmten bzgl. eines vorgegebenen Trägers $\mathfrak{h}(A)$ von A speziellen Träger $\operatorname{supp}(\xi)$ von P_A.

Somit stellt $\mathfrak{h}(P_A)$ stets eine (vollständig) einfache Unterhalbgruppe von $\mathfrak{G}$ dar [vgl. [28], Theorem 2.1]. Anschließend bezeichnen wir für jede Teilmenge $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ mit $M(\langle \mathfrak{A} \rangle)$ das minimale Ideal in der von $\mathfrak{A}$ erzeugten Halbgruppe.

2.2 Es bezeichne nun M_P ($P \in \mathcal{G}$) das kleinste Ideal in $\mathcal{G}$, welches P enthält.
Man definiert für jedes $P \in \mathcal{G}$ $\mathcal{F}_P := \{Q \in \mathcal{G} : M_Q = M_P\}$ und sieht, daß für $P,Q \in \mathcal{G}$ die entsprechenden $\mathcal{F}_P$ und $\mathcal{F}_Q$ entweder disjunkt sind oder übereinstimmen.
Für eine (vollständig) einfache Unterhalbgruppe $\mathcal{P}$ von $\mathcal{G}$ definiert man weiter $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} := \{Q \in \mathcal{G} : M_Q = \mathcal{G}\mathcal{P}\mathcal{G}\}$.
[Man bemerkt, daß $\mathcal{G}\mathcal{P}\mathcal{G}$ das kleinste Ideal ist, welches $\mathcal{P}$ enthält: $\mathcal{P}$ ist eine einfache Halbgruppe und somit gilt nach Kap. II, § 1.8 $\mathcal{P} = \mathcal{P}A\mathcal{P}$ für alle $A \in \mathcal{P}$. Folglich ist $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}\mathcal{P}\mathcal{G}$ und daher $\mathcal{G}\mathcal{P}\mathcal{G} = \mathcal{G}^2\mathcal{P}\mathcal{G}^2$. Existiere nun ein Ideal $\mathcal{A}$ in $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{P} \subset \mathcal{A} \subsetneq \mathcal{G}\mathcal{P}\mathcal{G}$, so gilt $\mathcal{G}\mathcal{P}\mathcal{G} \subset \mathcal{G}\mathcal{A}\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^2\mathcal{P}\mathcal{G}^2$. Also $\mathcal{G}\mathcal{A}\mathcal{G} = \mathcal{G}\mathcal{P}\mathcal{G}$ und damit $\mathcal{G}\mathcal{P}\mathcal{G} = \mathcal{G}\mathcal{A}\mathcal{G} \subset \mathcal{A} \subsetneq \mathcal{G}\mathcal{P}\mathcal{G}$ - ein Widerspruch!]
Offenbar gilt folgende Inklusion:
$\{\mathcal{F}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \subset \mathcal{G}$ ist (vollständig) einfache Halbgruppe$\} \subset \{\mathcal{F}_Q : Q \in \mathcal{G}\}$.
Anschließend kann man auf der nicht-leeren Menge $\{\mathcal{F}_Q : Q \in \mathcal{G}\}$ von Teilmengen von $\mathcal{G}$ eine partielle Ordnungsrelation "$\leq$" durch $\mathcal{F}_P \leq \mathcal{F}_Q :\Longleftrightarrow M_P \subset M_Q$ $(P,Q \in \mathcal{G})$ definieren.

2.3 SATZ: Sei $A \in \mathfrak{T}$ und sei $k_{\mathcal{G}}(A)$ vorgegeben. Ferner bezeichne P_A das Idempotent aus $\Gamma(A)$. Dann gilt:
(i) $k_{\mathcal{G}}(P_A) \subset M(\langle k_{\mathcal{G}}(A)\rangle)$
(ii) $k_{\mathcal{G}}(A) \subset \cup\{\mathcal{F}_Q : \mathcal{F}_{k_{\mathcal{G}}(P_A)} \leq \mathcal{F}_Q,\ Q \in \mathcal{G}\}$
Beweis: Man betrachte ein Paar von Maßen $(\mu,\xi) \in \mathcal{M}^1(\mathcal{G}) \times \mathcal{M}^1(\mathcal{G})$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) des Lemmas 2.1 und wendet sowohl [28], Theorem 7.5 als auch [28], Theorem 7.3 an.

2.4 BEMERKUNG: Mittels Satz 2.3 kann man für vorgegebene $A \in \mathfrak{T}$ und $k_{\mathcal{G}}(A)$ ($\subset \mathcal{G}$) die potentiellen Träger des Idempotents P_A, zu dem A gehört (und gegen das eventuell die Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ konvergiert), durch folgendes Verfahren bestimmen: Zunächst ermittelt man alle (vollständig) einfachen Halbgruppen $\mathcal{P}$, welche im minimalen Ideal der

von $\mathfrak{h}_\gamma(A)$ erzeugten Halbgruppe liegen. Anschließend bildet man für jede (vollständig) einfache Halbgruppe $\mathfrak{P}$ in $M(\langle \mathfrak{h}_\gamma(A) \rangle)$ die Vereinigung $V_\mathfrak{P} := \bigcup \{ \mathfrak{T}_Q : \mathfrak{T}_\mathfrak{P} \leq \mathfrak{T}_Q,\ Q \in \mathfrak{G} \}$. Dann ist jedes $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{h}_\gamma(A) \subset V_\mathfrak{P}$ ein Kandidat für den Träger des Idempotents P_A (siehe auch Beispiel 2.17).

2.5 SATZ: Sei $A \in \mathfrak{N}$ und sei P_A das Idempotent aus $\Gamma(A)$. Dann gilt:
Die Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ konvergiert, wenn ein Träger $\mathfrak{h}_\gamma(A)$ von A mit der Eigenschaft (*) $\mathfrak{h}_\gamma(P_A)\ \mathfrak{h}_\gamma(A)\ \mathfrak{h}_\gamma(P_A) = \mathfrak{h}_\gamma(P_A)$ existiert, wobei $\mathfrak{h}_\gamma(P_A)$ gemäß Lemma 2.1 zu $\mathfrak{h}_\gamma(A)$ gewählt wird.

Beweis: Sei $(\mu,\xi) \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$ ein Paar von Maßen mit den Eigenschaften (i) und (ii) des Lemmas 2.1.
Dann läßt sich die Relation (*) als $\mathrm{supp}(\xi)\ \mathrm{supp}(\mu)\ \mathrm{supp}(\xi) = \mathrm{supp}(\xi)$ umschreiben. Wegen [28], Theorem 8.1 folgt die Konvergenz der Folge $(\mu^n)_{n\geq 1}$ und aus der Stetigkeit der Resultanten die Konvergenz der Folge $(A^n)_{n\geq 1}$.

2.6 SATZ: Sei $A \in \mathfrak{N}$ und sei P_A das Idempotent aus $\Gamma(A)$.
Dann gilt:
Die Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ konvergiert, wenn ein Träger $\mathfrak{h}_\gamma(A)$ von A mit der Eigenschaft (*) $M(\langle \mathfrak{h}_\gamma(A) \rangle) = \mathfrak{h}_\gamma(P_A)$ existiert, wobei wiederum $\mathfrak{h}_\gamma(P_A)$ gemäß Lemma 2.1 zu $\mathfrak{h}_\gamma(A)$ gewählt wird.

Beweis: Sei wiederum $(\mu,\xi) \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$ ein Paar von Maßen mit den Eigenschaften (i) und (ii) des Lemmas 2.1.
Die Relation (*) läßt sich nun als $M(\langle \mathrm{supp}(\mu) \rangle) = \mathrm{supp}(\xi)$ umschreiben. Wegen [28], Theorem 8.3 ist die Folge $(\mu^n)_{n\geq 1}$ konvergent, und wegen der Stetigkeit der Resultanten ist ebenfalls die Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ konvergent.

2.7 KOROLLAR: Sei $A \in \mathfrak{N}$ und sei P_A das Idempotent aus $\Gamma(A)$.
Dann gilt:
Die Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ konvergiert, wenn ein Träger $\mathfrak{h}_\gamma(A)$ von A mit der Eigenschaft (*) $\mathfrak{h}_\gamma(A) \subset \mathfrak{h}_\gamma(P_A)$ existiert, wobei $\mathfrak{h}_\gamma(P_A)$ gemäß Lemma 2.1 zu $\mathfrak{h}_\gamma(A)$ gewählt wird.

Beweis: Da $\mathfrak{h}_{\mathfrak{H}}(P_A)$ eine (vollständig) einfache Halbgruppe ist, gilt $M(\langle \mathfrak{h}_{\mathfrak{H}}(P_A)\rangle) = \mathfrak{h}_{\mathfrak{H}}(P_A)$ und daher wegen (*) $M(\langle \mathfrak{h}_{\mathfrak{H}}(A)\rangle) \subset \mathfrak{h}_{\mathfrak{H}}(P_A)$. Da andererseits nach § 2.3 (i) stets $\mathfrak{h}_{\mathfrak{H}}(P_A) \subset M(\langle \mathfrak{h}_{\mathfrak{H}}(A)\rangle)$ gilt, folgt: $M(\langle \mathfrak{h}_{\mathfrak{H}}(A)\rangle) = \mathfrak{h}_{\mathfrak{H}}(P_A)$.
Satz 2.6 liefert schließlich den Beweis des Korollars.

2.8 SATZ: Sei $A \in \mathfrak{H}$ und sei P_A das Idempotent aus $\Gamma(A)$. Dann gilt: Die Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ konvergiert, wenn sich jeder Träger von P_A als Vereinigung von gewissen maximalen Gruppen des Kerns $\mathcal{K}$ von $\mathcal{G}$ darstellen läßt.

Beweis: Sei $(\mu,\xi) \in \mathfrak{M}^1(\mathcal{G}) \times \mathfrak{M}^1(\mathcal{G})$ ein Paar von Maßen mit den Eigenschaften (i) und (ii) des Lemmas 2.1.
Da $\xi = \xi^2$ gilt, ist nach [28], Theorem 2.1 $\mathrm{supp}(\xi)$ eine (vollständig) einfache Unterhalbgruppe von $\mathcal{G}$.

Ferner gilt $\mathrm{supp}(\xi) \subset \mathcal{K}$: Denn gemäß Kap. II, § 1.13 gilt stets entweder $\mathrm{supp}(\xi) \subset \mathcal{K}$ oder $\mathrm{supp}(\xi) \cap \mathcal{K} = \emptyset$.
Wäre $\mathrm{supp}(\xi) \cap \mathcal{K} = \emptyset$, dann folgte aus $R(\xi) = P_A$: P_A besitzt einen Träger, der nicht im Kern $\mathcal{K}$ von $\mathcal{G}$ liegt, was im Widerspruch zur Voraussetzung über P_A steht.
Also $\mathrm{supp}(\xi) \subset \mathcal{K}$.

Weiter folgt wegen $R(\xi) = P_A$ und wegen [28], Theorem 3.4: Das Maß ξ ist primitiv in $\mathfrak{M}^1(\mathcal{G})$, und daher ist gemäß [28], Theorem 8.5 die Folge $(\mu^n)_{n\geq 1}$ konvergent.
Die Stetigkeit der Resultanten liefert schließlich die Konvergenz der Folge $(A^n)_{n\geq 1}$.

2.9 KOROLLAR: Sei $\mathfrak{H} := \mathfrak{D}(n)$. Ferner seien $A \in \mathfrak{D}(n)$ und P_A das Idempotent aus $\Gamma(A)$. Die Folge $(A^k)_{k\geq 1}$ konvergiert, wenn jeder Träger von P_A mit der Extremalpunktmenge $\Pi(n)$ von $\mathfrak{H}$ übereinstimmt.

Beweis: Nach Kap. I, § 1.7 ist $\mathcal{G} = \Pi(n)$ eine Gruppe, und somit stimmt $\mathcal{G}$ mit ihrem Kern $\mathcal{K}$ überein.
Satz 2.8 liefert schließlich den Beweis des Korollars.

Daß die Voraussetzung des Satzes 2.8 nicht trivialerweise erfüllt ist, zeigt das erste Beispiel des folgenden Paragraphen.

2.10 BEISPIEL:

1. Sei $\mathfrak{T} := \mathfrak{D}(2)$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}(2) = \left\{ I, C := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ [vgl. Kap. I, § 1.7].

   Die Matrizen I und C gehören offenbar zu demselben Idempotent I ($C^2=I$). Ferner ist $\{I\}$ der einzige Träger des Einselements I von $\mathfrak{T}$ [vgl. Kap. III, § 1.4], und es gilt $\{I\} \neq \mathfrak{G}$.

   Nun ist die Folge $(I^n)_{n\geq 1}$ trivialerweise konvergent; dagegen konvergiert die Folge $(C^n)_{n\geq 1}$ nicht, da für alle $k \geq 0$ $C^{2k} = I$, $C^{2k+1} = C$ gilt.

2. Sei $A := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \in \mathfrak{D}(2)$. Offenbar ist $\mathfrak{G}$ der einzige Träger der Matrix A, und somit sind $\{I\}$ und $\mathfrak{G}$ selbst wegen Satz 2.3 zwei Kandidaten für <u>den</u> Träger des Idempotents P_A:

   $M(\mathfrak{h}(A)) = M(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$; $\mathfrak{F}_I = \mathfrak{F}_C = \mathfrak{F}_{\{I\}} = \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$.

Beachte: Die Matrix A gehört zum Idempotent $P_A := \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, und die Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ ist dann nach Korollar 2.9 konvergent:

Sei $A^n = \frac{1}{3^n} \begin{bmatrix} a_n & \mathfrak{b}_n \\ \mathfrak{b}_n & a_n \end{bmatrix}$ $(n=1,2,\ldots)$. Es folgt $A^{n+1} = A.A^n =$

$= A^n A = \frac{1}{3^{n+1}} \begin{bmatrix} 2a_n+\mathfrak{b}_n & 2\mathfrak{b}_n+a_n \\ 2\mathfrak{b}_n+a_n & 2a_n+\mathfrak{b}_n \end{bmatrix}$, und daher gilt:

$$a_{n+1} = \mathfrak{b}_n + 2a_n; \quad \mathfrak{b}_{n+1} = a_n + 2\mathfrak{b}_n.$$

Weiter gilt: $\Delta^2 a_n := \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n =$

$= (\mathfrak{b}_{n+1} + 2a_{n+1}) - 2a_{n+1} + a_n = \mathfrak{b}_{n+1} + a_n = (a_n + 2\mathfrak{b}_n) + a_n =$

$= 2a_n + 2(a_{n+1} - 2a_n) = 2(a_{n+1} - a_n)$.

Somit erhält man die Differenzengleichung $\Delta^2 a_n - 2\Delta a_n = 0$, deren charakteristische Gleichung $x^2 - 2x = 0$ die Lösungen

$x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ besitzt. Bekanntlich gilt dann $a_n = c_1 (0+1)^n + c_2 (2+1)^n$ für alle $n = 1,2,\ldots$. Dabei sind $c_i (i=1,2)$ zwei reelle Koeffizienten, welche aus den Anfangsbedingungen $a_1 = 2 (= c_1+3c_2)$, $a_2 = 5 (= c_1+9c_2)$ bestimmt werden können. Folglich sind $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ und daher

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3^n} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^n} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^n} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3^n} \end{bmatrix} \quad (n=1,2,\ldots).$$

Schließlich erhält man $\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \; (= P_A)$.

Für die Konvergenz einer Folge $(\mu^n)_{n\geq 1}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einer kompakten Halbgruppe $\mathfrak{H}$ kennt man notwendige und hinreichende Bedingungen [siehe [25], Kap. V, § 5, Theorem 1].

Wir beschränken uns auf den Spezialfall einer endlichen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Einselement s und geben einen kurzen Beweis des folgenden Lemmas, das unmittelbar benötigt wird.

2.11 LEMMA: Sei $\mathfrak{H}$ eine endliche Halbgruppe mit Einselement s und sei $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{H})$.
Ist $s \in \operatorname{supp}(\mu)$, dann konvergiert die Folge $(\mu^n)_{n\geq 1}$.

Beweis: Wegen [15a], § 6.5.1 genügt es zu zeigen, daß die maximale Gruppe in $\Gamma(\mu) := \overline{\{\mu^n : n \geq 1\}}$ einelementig ist.

Es gilt $\operatorname{supp}(\mu) \subset \operatorname{supp}(\mu^2)$, weil s zu $\operatorname{supp}(\mu)$ gehört. Andererseits existiert wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{H}$ ein $\beta \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$(1) \quad \mathfrak{P} := \operatorname{supp}(\mu^\beta) = \operatorname{supp}(\mu^{\beta+n})$$

für alle $n \geq 1$ gilt.

Seien nun $\pi = \pi^2$ das eindeutig bestimmte Idempotent in $\Gamma(\mu)$ und $\mathfrak{G}$ die maximale Gruppe mit Eins π in $\Gamma(\mu)$.

Ferner sei $(k_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, so daß $\lim_{n\to\infty} \mu^{k_n} = \pi$. Es folgt $\mathrm{supp}(\pi) = \Phi$.

Nun gilt für ein $\nu \in \Phi$ $\nu = \nu\pi = \pi\nu$ und somit wegen (1)

$$(2)\quad \mathrm{supp}(\nu)\ (=\mathrm{supp}(\nu).\Phi) = \Phi .$$

Andererseits gilt wegen Kap. II, § 2.2:

$$\mathrm{supp}(\Phi) \cong G \times A \times B \quad , \quad \Phi\ (=\mathrm{supp}(\pi)) \cong N \times A \times B,$$
$$\pi \cong \omega_N \otimes \xi \otimes \zeta \text{ und } \nu \cong (\varepsilon_g * \omega_N) \otimes \xi \otimes \zeta \quad (g \in G).$$

Wegen (2) muß $gN = N$ gelten, d.h., g gehört zu N.
Folglich ist $\nu = \pi$ $(\cong \omega_N \otimes \xi \otimes \zeta)$ und daher $\Phi = \{\pi\}$,
was den Beweis des Satzes erbringt.

Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}_1$ stets
$\mathfrak{T}_1 := \{A \in \mathfrak{T} : A$ besitzt einen Träger, der das Einselement S von $\mathfrak{T}$ umfaßt.$\}$

$\mathfrak{T}_1$ ist offenbar eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{T}$.

2.12 LEMMA: Sei $\mathfrak{T} := \mathbb{P}(n)$ und sei $A \in \mathfrak{T}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) $A \in \mathfrak{T}_1$
(ii) $a_{ii} \neq 0$, für alle $i=1,2,\ldots,n$.
(iii) $\| A - I \|_\infty < 2$.

Beweis: Zunächst bemerkt man, daß nach Kap. III, § 1.4
I zu $\ell(\mathfrak{T}) = \mathbb{F}(n)$ gehört. Weiter kann man o.B.d.A. stets
$A \neq I$ annehmen.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $A \in \mathfrak{T}_1$. Dann gestattet A die Darstellung
$A = \vartheta I + \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i S_i$ für geeignete $\vartheta, \vartheta_i > 0$ mit
$\vartheta + \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i = 1$ und $S_i \in \mathbb{F}(n)$ für alle $i=1,2,\ldots,k$.
Folglich ist $a_{ii} \neq 0$ für alle $i=1,2,\ldots,n$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Für alle $i=1,2,\ldots,n$ gilt:
$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - \delta_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - a_{ii} + |a_{ii} - 1| = 2(1-a_{ii}) < 2.$$

Also $\|A - I\|_\infty := \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - \delta_{ij}| < 2.$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Es existiere ein i ($1 \le i \le n$) mit $a_{ii} = 0$. Dann ist $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - \delta_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + |0 - 1| = 2$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $\lambda := \min_{1\le i\le n} a_{ii}$, also $\lambda \in]0,1[$ $(A \neq I)$.

Die Matrix $P := \frac{1}{1-\lambda}(A - \lambda I)$ gehört dann zu $\mathbb{P}(n)$, und es gilt: $A = \lambda I + (1-\lambda) P$.

Sei $\mathfrak{h}_\gamma(P)$ ein Träger von P. So ist $\mathfrak{h}_\gamma(A) := \{I\} \cup \mathfrak{h}_\gamma(P)$ ein Träger von A. Folglich gehört A zu $\mathfrak{T}_1$.

2.13 BEMERKUNG: Ersetzt man im obigen Lemma die E-Halbgruppe $\mathbb{P}(n)$ durch die E-Halbgruppe $\mathbb{S}(n)$, dann gilt nur die Äquivalenz (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).
[Für $A := 0$ gilt: $\| 0 - I \|_\infty = 1 < 2$.]

2.14 SATZ: Sei $\mathfrak{T}$ eine E-Halbgruppe mit Einselement S und sei $A \in \mathfrak{T}_1$. Dann gilt:

(i) Die Folge $(A^n)_{n\ge 1}$ konvergiert gegen das Idempotent P_A aus $\Gamma(A)$.

(ii) Jeder Träger $\mathfrak{h}_\gamma(A)$ von A mit $S \in \mathfrak{h}_\gamma(A)$ erfüllt die Relation $\mathfrak{h}_\gamma(P_A)\,\mathfrak{h}_\gamma(A)\,\mathfrak{h}_\gamma(P_A) = \mathfrak{h}_\gamma(P_A)$, wobei $\mathfrak{h}_\gamma(P_A)$ gemäß Lemma 2.1 zu $\mathfrak{h}_\gamma(A)$ gewählt wird.

<u>Beweis:</u> Sei $A \in \mathfrak{T}_1$. Zu $\mathfrak{h}_\gamma(A) = \{S_1, S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ $(\subset \mathfrak{S})$ existieren $\lambda > 0$, $\lambda_i > 0$ $(i=1,2,\ldots,k)$ mit $\lambda + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, so daß $A = \lambda S + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i S_i$ gilt.

Man betrachte ein Paar von Maßen $(\mu,\xi) \in \mathfrak{M}^1(\mathfrak{S}) \times \mathfrak{M}^1(\mathfrak{S})$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) des Lemmas 2.1.

Wegen Lemma 2.11 existiert $\lim_{n\to\infty} \mu^n$ $(\mu := \lambda \varepsilon_S + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varepsilon_{S_i})$, und wegen der Stetigkeit der Resultanten existiert ebenfalls $\lim_{n\to\infty} A^n$ $(R(\mu) = A)$.

Da andererseits $\xi = \xi^2 \in \Gamma(\mu)$ und ferner $\xi = \xi\mu = \mu\xi = \xi\mu\xi$ gilt, folgt: $\xi = \lim_{n\to\infty} \mu^n$.

Also $P_A(=R(\xi)) = \lim_{n\to\infty} A^n$ sowie $\mathfrak{h}(P_A) = \mathfrak{h}(P_A)\,\mathfrak{h}(A)\,\mathfrak{h}(P_A)$, was den Beweis des Satzes vervollständigt.

2.15 KOROLLAR: Sei A eine stochastische bzw. doppelt-stochastische Matrix. Die Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ konvergiert, wenn A eine (und damit alle) der im Lemma 2.12 angeführten Bedingungen erfüllt.

2.16 KOROLLAR: Die Folge $(A^n)_{n\geq 1}$, wobei A eine substochastische Matrix ist, konvergiert, wenn A eine der in Lemma 2.12 (i) oder (ii) (und damit beide) angeführten Bedingungen erfüllt.

2.17 BEISPIEL: Sei $\mathfrak{T} := \mathfrak{P}(2)$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}(2) = \{e,a,b,c\}$ [vgl. Kap. I, § 1.7].

Sei ferner $A \in \mathfrak{T}_1$, $A := \begin{bmatrix} \vartheta_1+\vartheta_2 & \vartheta_3 \\ \vartheta_2+\vartheta_3 & \vartheta_1 \end{bmatrix}$ mit $\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3 = 1$, $\vartheta_i > 0$ $(i=1,2,3)$.

$\mathfrak{h}(A) = \{e,a,c\}$ ist offenbar ein Träger der Matrix A, welcher das Einselement $S=I(=:e)$ von $\mathfrak{T}$ umfaßt.
Nach einer einfachen Rechnung ergibt sich: $\langle \mathfrak{h}(A) \rangle = \mathfrak{G}$ sowie $M(\langle \mathfrak{h}(A) \rangle) = \{a,b\}$.
Wegen Satz 2.3 (i) gilt: $\mathfrak{h}(P_A) \subset \{a,b\}$.

Weiter stellt $\mathbb{H} := \mathbb{H}(\mathfrak{T}) = \{\{e\}, \{a\}, \{b\}, \{e,c\}, \{a,b\}\}$ die Menge aller (vollständig) einfachen Unterhalbgruppen von $\mathfrak{G}$ dar [vgl. Kap. III, § 2.4]. Somit gilt: $\mathfrak{h}(P_A) \in \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.
Da $\{a,b\}$ das einzige Element aus $\mathbb{H}$ ist, das die Relation in Satz 2.14 (ii) erfüllt, folgt: $\mathfrak{h}(P_A) = \{a,b\}$.

Demnach konvergiert die Folge $(A^n)_{n\geq 1}$ gegen das Idempotent $P_A := \begin{bmatrix} \vartheta & 1-\vartheta \\ \vartheta & 1-\vartheta \end{bmatrix}$ bzw. die Matrix A gehört zum Idempotent P_A für ein gewisses $\vartheta \in [0,1]$.

§ 3. KONVERGENZ DES UNENDLICHEN PRODUKTES EINER MAXIMOFF-FOLGE IN EINER E-HALBGRUPPE

Es bezeichne $\mathfrak{H}$ eine E-Halbgruppe mit Einselement S und $\mathfrak{H}_1$ wiederum die Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, definiert durch $\mathfrak{H}_1 := \{A \in \mathfrak{H} : A$ besitzt einen Träger h_γ mit $S \in h_\gamma\}$

3.1 DEFINITION: Eine Folge $(A_k)_{k\geq 1}$ in $\mathfrak{H}_1$ heißt Maximoff-Folge, wenn folgendes gilt:
Es existiert eine Folge $(\vartheta_k)_{k\geq 1}$ in $]0,1]$ mit $\alpha := \inf_k \vartheta_k \succ 0$ und eine Folge $(P_k)_{k\geq 1}$ in $\mathfrak{H}$, derart, daß für alle k=1,2,... $A_k = \vartheta_k S + (1-\vartheta_k)P_k$ gilt.

3.2 LEMMA: Sei $\mathfrak{H} := \mathbb{S}(n)$ bzw. $\mathbb{P}(n)$ bzw. $\mathbb{D}(n)$. Dann gilt:
Eine Folge $(A_k)_{k\geq 1}$, $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ in $\mathfrak{H}$ ist genau dann eine Maximoff-Folge, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:
(i) Für alle $k\geq 1$, $i,j=1,2,\ldots,n$ gilt $|a_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}| \leq \beta$ für ein $\beta \in [0,1[$.
(ii) Für alle $k\geq 1$ ist die Gesamtnorm $|A_k - I| := n \cdot \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}| \leq n\beta$, für ein $\beta \in [0,1[$.

Beweis: Die Äquivalenz (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) ist klar, da $\| A_k - I \| = n \cdot \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}|$ für alle $k\geq 1$ gilt.
Ferner gilt S(:= das Einselement von $\mathfrak{H}$) = I.

Sei nun $(A_k)_{k\geq 1} \subset \mathfrak{H}_1$ eine Maximoff-Folge. d.h., $A_k = \vartheta_k I + (1-\vartheta)P_k$ (k=1,2,...) für eine Folge $(\vartheta_k)_{k\geq 1}$ in $]0,1]$ mit $\alpha := \inf_k \vartheta_k \succ 0$ und eine geeignete Folge $(P_k)_{k\geq 1}$ in $\mathfrak{H}$.

Weiter seien $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ und $P_k = (p_{ij}^{(k)})_{i,j=1,2,\ldots,n}$.

Aus $A_k - I = (\vartheta_k - 1)I + (1-\vartheta_k)P_k$, $k=1,2,\ldots$ folgt:

$$\left| a_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \right| = \left| (1-\vartheta_k)(p_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}) \right| = (1-\vartheta_k) \left| p_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \right| \leq$$

$$\leq 1-\vartheta_k \leq 1-\alpha =: \beta \in [0,1[\, .$$

Umgekehrt: O.B.d.A sei $\beta \neq 0$.
Aus $\left| a_{ii}^{(k)} - 1 \right| \leq \beta$ $(k=1,2,\ldots)$ folgt $a_{ii}^{(k)} \geq 1-\beta =: \alpha \, (\in]0,1[)$.
für alle $i=1,2,\ldots,n$.

Sei nun $\vartheta_k := \min\limits_{1 \leq i \leq n} a_{ii}^{(k)}$. Offenbar gilt $\vartheta_k \geq \alpha$ für alle $k=1,2,\ldots$ und daher $\inf\limits_k \vartheta_k \geq \alpha > 0$.

Man definiert $P_k := \frac{1}{1-\vartheta_k} (A_k - \vartheta_k I)$, $k=1,2,\ldots$, und zeigt, daß $P_k \in \mathfrak{T}$ für alle $k=1,2,\ldots$ gilt.

Folglich ist A_k, $k=1,2,\ldots$, von der Gestalt
$A_k = \vartheta_k I + (1-\vartheta_k) P_k$, d.h., $(A_k)_{k \geq 1}$ ist eine Maximoff-Folge.

3.3 SATZ: Sei $\mathfrak{T}$ eine E-Halbgruppe mit der Eigenschaft, daß die von ihren Extremalpunkten erzeugte Halbgruppe $\mathfrak{G}$ eine Gruppe in $\mathfrak{T}$ bildet.
Dann gilt: Für jede Maximoff-Folge $(A_k)_{k \geq 1}$ in $\mathfrak{T}$ ist die Folge $(D_{\ell,r})_{r > \ell}$, definiert durch $D_{\ell,r} := A_{\ell+1} A_{\ell+2} \cdots A_r$, für alle $\ell = 0,1,2,\ldots$ konvergent.
Insbesondere existiert stets $\lim\limits_{k \to \infty} \prod\limits_{i=1}^{k} A_i$.

Beweis: Seien $(\vartheta_k)_{k \geq 1}$ und $(P_k)_{k \geq 1}$ die der Folge $(A_k)_{k \geq 1}$ entsprechenden Folgen von reellen Zahlen in $]0,1]$ mit $\alpha := \inf\limits_k \vartheta_k > 0$ und von Elementen in $\mathfrak{T}$, derart, daß für alle $k=1,2,\ldots$ $A_k = \vartheta_k S + (1-\vartheta_k) P_k$ gilt.

Man wählt eine Folge $(\gamma_k)_{k \geq 1}$ in $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{G})$, so daß $R(\gamma_k) = P_k$ für alle $k=1,2,\ldots$ gilt [vgl. Kap. III, § 1.8 (β)].

Ferner definiert man die Folge $(\mu_k)_{k\geq 1}$ in $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ durch

$$\mu_k := \vartheta_k \varepsilon_S + (1-\vartheta_k)\,\nu_k\,, \quad k=1,2,\ldots\,,$$

wobei S das Einselement von $\mathfrak{T}$ bezeichnet.

Nun gilt $\mu_k(\{S\}) \geq \alpha > 0$ für alle k=1,2,..., und somit ist nach einem Satz von V.M. Maximoff [vgl. [19], Theorem 12, und [11 a], Theorem 4.7] die Folge $(\mu_k)_{k\geq 1}$ faltungskonvergent.
D.h., die Folge $(\mathfrak{h}_{\ell,r})_{r\geq\ell}$ $(\mathfrak{h}_{\ell,r} := \mathfrak{h}_{\ell+1}\,\mathfrak{h}_{\ell+2}\cdots\mathfrak{h}_r)$ konvergiert für alle $\ell = 0,1,2,\ldots$, und wegen der Stetigkeit der Resultanten konvergiert ebenfalls die Folge $(D_{\ell,r})_{r\geq\ell}$.

3.4 KOROLLAR: Für jede Folge von doppelt-stochastischen Matrizen $(A_k)_{k\geq 1}$, $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ mit der Eigenschaft $|a_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}| \leq \beta$ für ein vorgegebenes $\beta \in [0,1[$ $(k=1,2,\ldots,\ i,j=1,2,\ldots,n)$ ist die Folge $(D_{\ell,r})_{r\geq\ell}$, $D_{\ell,r} := A_{\ell+1}\,A_{\ell+2}\cdots A_r$, für alle $\ell = 0,1,2,\ldots$ konvergent.
Insbesondere existiert stets $\lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{k} A_i$.

Beweis: Die Extremalpunkte der Halbgruppe $\mathfrak{D}(n)$ bilden eine Gruppe, nämlich die Gruppe der Permutationsmatrizen der Ordnung n [vgl. Kap. I, § 1.7 (3)].
Lemma 3.2 und Satz 3.3 liefern schließlich den Beweis des Korollars.

3.5 BEMERKUNG: Der für endliche Gruppen gültige Satz von V.M. Maximoff [siehe [19], Theorem 12 bzw. [11a], Theorem 4.7] bleibt für beliebige endliche Halbgruppen im allgemeinen nicht richtig; dies zeigt das folgende Beispiel.

3.6 BEISPIEL: Sei $\mathfrak{T} := \mathfrak{P}(2)$ mit $\mathfrak{G} = \{e,a,b,c\}$, wobei

$$e := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ a := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ b := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ c := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sind.

Man betrachtet die Folge $(\mu_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{M}^1(\mathbb{G})$, definiert durch

$$\mu_n := \vartheta_1^{(n)}\varepsilon_e + \vartheta_2^{(n)}\varepsilon_a + \vartheta_3^{(n)}\varepsilon_b \qquad n=1,2,\dots ,$$

wobei $\vartheta_i^{(n)} \geq 0$ $(i=1,2,3)$ und $\vartheta_1^{(n)} + \vartheta_2^{(n)} + \vartheta_3^{(n)} = 1$ für alle $n=1,2,\dots$ gilt.
Ferner definiert man $\nu_{k,n} := \mu_{k+1}\,\mu_{k+2}\cdots\mu_n$ für alle k mit $0\leq k<n$.

Es folgt:
$$\nu_{o,n}(\{e\}) = \prod_{i=1}^{n} \vartheta_i^{(n)}$$

$$\nu_{o,n}(\{a\}) = \vartheta_1^{(n)}\nu_{o,(n-1)}(\{a\}) + \vartheta_2^{(n)} \quad (n\geq 2)$$

$$\nu_{o,n}(\{b\}) = \vartheta_1^{(n)}\nu_{o,(n-1)}(\{b\}) + \vartheta_3^{(n)} \quad (n\geq 2).$$

$$\Big[(\nu_{o,n-1}(\{e\})\varepsilon_e + \nu_{o,n-1}(\{a\})\varepsilon_a + \nu_{o,n-1}(\{b\})\varepsilon_b)\cdot$$
$$(\vartheta_1^{(n)}\varepsilon_e + \vartheta_2^{(n)}\varepsilon_a + \vartheta_3^{(n)}\varepsilon_b) = (\nu_{o,n-1}(\{e\})\cdot\vartheta_1^{(n)})\varepsilon_e +$$
$$+\big[\nu_{o,n-1}(\{e\})\vartheta_2^{(n)} + \nu_{o,n-1}(\{a\})\cdot\vartheta_1^{(n)} + \nu_{o,n-1}(\{a\})\vartheta_2^{(n)} +$$
$$+ \nu_{o,n-1}(\{b\})\cdot\vartheta_2^{(n)}\big]\varepsilon_a + \big[\nu_{o,n-1}(\{e\})\vartheta_3^{(n)} + \nu_{o,n-1}(\{a\})\vartheta_3^{(n)} +$$
$$+ \nu_{o,n-1}(\{b\})\cdot\vartheta_1^{(n)} + \nu_{o,n-1}(\{b\})\vartheta_3^{(n)}\big]\varepsilon_b = (\vartheta_1^{(n)}\cdot\nu_{o,n-1}(\{e\}))\varepsilon_e +$$
$$+(\vartheta_1^{(n)}\cdot\nu_{o,n-1}(\{a\}) + \vartheta_2^{(n)})\varepsilon_a + (\vartheta_1^{(n)}\nu_{o,n-1}(\{b\}) + \vartheta_3^{(n)})\varepsilon_b \cdot \Big]$$

Für $\beta \in]0,1[$ betrachtet man die spezielle Folge $(\mu_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{M}^1(\mathbb{G})$, wobei die ϑ_i, $i=1,2,3$ folgendermaßen festgesetzt sind:

$$\vartheta_1^{(n)} := \beta\,,\ \vartheta_2^{(n)} := 1-\beta,\ \vartheta_3^{(n)} := 0 \quad \text{für } n=2k \quad (k\geq 1)$$

und $\vartheta_1^{(n)} := \beta\,,\ \vartheta_2^{(n)} := 0\,,\ \vartheta_3^{(n)} := 1-\beta$ für $n=2k+1$ $(k\geq o)$.

Dann gilt: $\nu_{0,1}(\{a\}) = 0$

$\nu_{0,2}(\{a\}) = 1-\beta$

$\nu_{0,3}(\{a\}) = (1-\beta)\beta$

$\nu_{0,2k}(\{a\}) = (1-\beta)(1+\beta^2+\beta^4+\cdots+\beta^{2(k-1)})$ $(k\geq 2)$

$\nu_{0,2k+1}(\{a\}) = (1-\beta)\beta\,(1+\beta^2+\beta^4+\cdots+\beta^{2(k-1)})$ $(k\geq 2)$.

Folglich ist

$$\lim_{k\to\infty} \nu_{0,2k}(\{a\}) = (1-\beta) \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\beta^2)^n}{1-\beta^2} = \frac{1-\beta}{1-\beta^2} = \frac{1}{1+\beta}$$

$$\lim_{k\to\infty} \nu_{0,2k+1}(\{a\}) = (1-\beta)\beta \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\beta^2)^n}{1-\beta^2} = \beta\,\frac{1}{1+\beta},$$

und daher ist die spezielle Folge $(\mu_n)_{n\geq 1}$ in $\mathfrak{M}^1(\mathbb{G})$ nicht faltungskonvergent.

.7 Wir kommen auf die Konvergenz des unendlichen Produktes einer Maximoff-Folge in einer E-Halbgruppe zurück.

Für jedes Element A_k $(k=1,2,\ldots)$ einer Maximoff-Folge $(A_k)_{k\geq 1}$ in einer beliebigen E-Halbgruppe $\mathfrak{H}$ existiert nach Satz 2.14 stets $\lim_{n\to\infty} (A_k)^n$.

Die Folge $(\prod_{i=1}^{k} A_i)_{k\geq 1}$ der Partialprodukte von $(A_k)_{k\geq 1}$ in einer beliebigen E-Halbgruppe konvergiert jedoch im allgemeinen nicht. Somit läßt sich also der Geltungsbereich des Satzes 3.3 ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht auf beliebige E-Halbgruppen erweitern.

Hierzu betrachte man die in Kapitel I, § 2.6 angegebene treue Darstellung D und wende sie auf die in Beispiel 3.6 eingeführte Folge $(\mu_n)_{n\geq 1}$ an. Dann ist nämlich die Folge $(\prod_{i=1}^{k} D(\mu_i))_{k\geq 1}$ der Partialprodukte von $(D(\mu_k))_{k\geq 1}$ in der E-Halbgruppe $\mathfrak{P}(4)$ nicht konvergent.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

[1] BERGE, C. : Théorie des graphes et ses applications. Paris: Dunod 1958.

[2] BIRKHOFF, G. : Tres observaciones sobre el algebra linear. Univercidad Nacional de Tucuman, Revista Ser. A, 5, 147 - 151 (1946) .

[3] BÖGE, W. : (a) Über die Charakterisierung unendlich teilbarer Wahrscheinlichkeitsverteilungen. J. Reine Angew. Math. 201, 150 - 156 (1959) .

(b) Zur Charakterisierung sukzessiv unendlich teilbarer Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf lokalkompakten Gruppen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete 2, 380 - 394 (1964) .

[4] BROWN, D.R. : On clans of non-negative matrices. Proc. Amer. Math. Soc. 15, 671 - 674 (1964) .

[5] CARNAL, H. : Deux théorèmes sur les groupes stochastiques compacts. Comment. Math. Helv. 40, 237 - 246 (1966) .

[6] CHOQUET, G. : Lectures on Analysis II . New York - Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc.1969.

[7] CLIFFORD, A.H. - PRESTON, G.B. : The algebraic theory of semigroups I . Mathematical surveys Nr. 7 of the Amer. Math. Soc. 1961.

[8] CUTHBERT, J.R. : (a) On uniqueness of the logarithm for Markov semi-groups.
J. Lond. Math. Soc. (2), 4, 623 - 630 (1972) .

(b) The logarithm function for finite-state Markov semi-groups.
J. Lond. Math. Soc. (2), 6, 524 - 532 (1973) .

[9] ELFVING, G. : Zur Theorie der Markoffschen Ketten.
Acta Soc. Sci. Fennicae N. Ser. A, II, Nr. 8, 1 - 17 (1937) .

[10] FLOR, P. : On groups of non-negative matrices.
Compositio Math. 21, 4, 376 - 382 (1969).

[11] HEYER, H. : (a) Probabilistic characterization of certain classes of locally compact groups.
Symposia Mathematica - Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, Vol. XVI, 315 - 355 (1975) .

(b) Probability measures on locally compact groups.
Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1977 .

[12] HOFMANN K.H. - MOSTERT P.S. : Elements of compact semigroups.
Columbus, Ohio : Charles E. Merrill Books, Inc. 1966 .

[13] JOHANSEN, S. : (a) Some results on the imbedding problem for finite Markov chains. Preprint, University of Copenhagen : Institute of Mathematical Statistics, 1972 .
[bzw. : J. Lond. Math. Soc. II, Ser. 8, 345 - 351 (1974).]

(b) The imbedding problem for finit Markov chains II .
Preprint, University of Copenhagen : Institute of Mathematical Statistics, 1972 .
[bzw. : A central limit theorem for finite semigroups and its applications to the imbedding problem for finite state Markov chains.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete 26, 171 - 190 (1973).]

[14] KINGMAN, J.F.C. : The imbedding problem for finite Markov chains.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete 1, 14 - 24 (1962) .

[15] KLOSS, B.M. : (a) Probability distributions on bicompact topological groups.
Theor. Probability Appl. IV, 3, 237 - 270 (1959) .

(b) Limiting distributions on bicompact abelian groups.
Theor. Probability Appl. VI, 4, 361 - 389 (1961) .

: (c) Stable distributions on a class of locally compact groups.
Theor. Probability Appl. VII, 3, 237 - 257 (1962) .

[16] KOCH, R.J. : Primitive idempotents in compact semigroups.
Proc. Amer. Math. Soc. 5, 828 - 833 (1964) .

[17] MARCUS, M.- MINC, H. : A survey of matrix theory and matrix inequalites.
Boston : Allyn and Bacon 1964 .

[18] MARTIN - LÖF PER : Probability theorie on discrete semigroups.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete 4, 78 - 102 (1965) .

[19] MAXIMOFF, V.M. : Necessary and sufficient conditions for the convergence of the convolution of non-identical distributions on a finite group.
Theor. Probability Appl. 13, 287 - 298 (1968)

[20] MUKHERJEA, A. - TSERPES, N.A. : Measures on topological semigroups.
Lecture Notes in Math. , Vol.547.
Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1976 .

[21] NUMAKURA, K. : On bicompact semigroups.
Math. J. Okayama Univ. 1, 99 - 108 (1952) .

[22] PHELPS, R.R. : Lectures on Choquet's theorem. Princeton, N.J. - Toronto - New York - London : D. van Nostrand 1966.

[23] RAO BHASKARA K.P.S. - RAO BHASKARA S. - : RAO BHASKARA M. A generalization of Birkhoff's theorem on matrices. Preprint, Research and Training School : Indian Statistical Institut 1975 - 76 .

[24] ROCKAFELLAR, T.R. : Convex Analysis. Princeton, N.J. : Princeton University Press 1970 .

[25] ROSENBLATT, M. : Markov processes. Structure and asymptotic behavior. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.

[26] SCHAEFER, H.H . : Banach lattices and positive operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974.

[27] SCHMETTERER, L. : On Poisson laws and related questions. Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. II, 169 - 185. Berkeley and Los Angeles : University of California Press 1970 .

[28] SCHWARZ, S. : Probabilities on non-commutative semigroups. Czechoslovak Math.J.13,(88),372-426(1963).

[29] SPEAKMAN, J.M.O. : Two Markov chains with a common skeleton. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete 7, S .224 (1967) .

[30] VOROBJOV, N.N. : Addition unabhängiger zufälliger Größen auf endlichen abelschen Gruppen (russisch). Math. Sbornik, N. Ser. 34, 89-126 (1954) .

VERZEICHNIS DER VERWENDETEN SYMBOLE

$\mathbb{N}$	Die Menge der natürlichen Zahlen.
$\mathbb{Q}$	Die Menge der rationalen Zahlen.
$\mathbb{R}$	Die Menge der reellen Zahlen.
$\mathbb{R}_+$ bzw. $\mathbb{R}_+^*$	Die Menge der nicht-negativen bzw. positiven reellen Zahlen.
$\mathbb{C}$	Die Menge der komplexen Zahlen.
$\mathbb{K}$	$:= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
$\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$	Der n-dimensionale euklidische Raum.
$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$	Die Menge aller Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$	Der Ring der nxn-Matrizen über $\mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$.
$\mathbb{S}(n)$	Die Menge der substochastischen Matrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.
$\mathbb{P}(n)$	Die Menge der stochastischen Matrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.
$\mathbb{D}(n)$	Die Menge der doppelt stochastischen Matrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.
$\mathbb{O}(n)$	Die Menge aller (0,1)-Matrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.
$\mathbb{E}(n)$	Die Menge aller substochastischen Matrizen in $\mathbb{O}(n)$.
$\mathbb{F}(n)$	Die Menge aller stochastischen Matrizen in $\mathbb{O}(n)$.
$\mathbb{T}(n)$	Die Menge aller doppelt stochastischen Matrizen in $\mathbb{O}(n)$.
$\mathbb{I}_{sub}(n)$	Die Menge aller Subintensitätsmatrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.
$\mathbb{I}(n)$	Die Menge aller Intensitätsmatrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.
$\mathbb{I}_{st}(n)$	Die Menge aller starken Intensitätsmatrizen in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.
0	Die Nullmatrix in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.
I	Die Einheitsmatrix in $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}$	Eine beliebige Halbgruppe.
$\mathcal{E}(\mathcal{S})$	Die Menge aller Extremalpunkte von $\mathcal{S}$.
$\mathcal{J} := \mathcal{J}(\mathcal{S})$	Die Menge aller Idempotenten in $\mathcal{S}$.
$\mathcal{J}_\sharp := \mathcal{J}_\sharp(\mathcal{S})$	Die Menge aller primitiven Idempotenten in $\mathcal{S}$.

D	Eine spezielle Darstellung der Algebra $\mathcal{M}^b(\mathfrak{H})$ der beschränkten Maße auf einer endlichen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{M}(m, \mathbb{R})$ [siehe: Kap. I, § 2.6].
R	Die Resultante [siehe: Kap. III, § 1.8].
$\mathfrak{T}$	Eine beliebige extremalendliche Halbgruppe in $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$.
$\mathfrak{k}(\mathfrak{T})$	Die Menge der Extremalpunkte von $\mathfrak{T}$.
$\mathfrak{G}$	Die von $\mathfrak{k}(\mathfrak{T})$ erzeugte (endliche) Halbgruppe in $\mathfrak{T}$.
S	Das Einselement von $\mathfrak{T}$.
$B \ (=B^2)$	Ein beliebiges Idempotent von $\mathfrak{T}$.
A	Ein beliebiges Element von $\mathfrak{T}$.
$\Gamma(A)$	$:= \overline{\{A^n : n \geq 1\}}$
P_A	Das Idempotent aus $\Gamma(A)$ (zu dem A gehört).
$\mathfrak{h}_{\mathfrak{T}}(A) \ (\subset \mathfrak{G})$	Ein beliebiger Träger des Elements $A \in \mathfrak{T}$.
$\mathfrak{h}_{\mathfrak{T}}(P_A) \ (\subset \mathfrak{G})$	Ein spezieller Träger von P_A siehe:[Kap. V, § 2.2].
$\mathfrak{K}$	Der Kern von $\mathfrak{G}$.
$\mathfrak{g} \ (\subset \mathfrak{G})$	Eine beliebige Gruppe in $\mathfrak{G}$.
$\mathfrak{P} \ (\subset \mathfrak{G})$	Eine beliebige (vollständig) einfache Halbgruppe in $\mathfrak{G}$.
$\mathfrak{H} := \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$	Die Menge aller (vollständig) einfachen Unterhalbgruppen von $\mathfrak{G}$.
$\mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$	Die kompakte Halbgruppe der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{G}$.
$\mathfrak{I}$	Die Menge aller idempotenten Maße in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$.
$\mathfrak{P}$	Die Menge aller primitiven idempotenten Maße in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$.
$\mathfrak{M}$	Die Menge aller maximalen idempotenten Maße in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$.
Γ	Eine beliebige Gruppe von Maßen in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$.
$\mathbb{\Gamma} := \mathbb{\Gamma}(\mathcal{M}^1(\mathfrak{G}))$	Die Menge aller Gruppen von Maßen in $\mathcal{M}^1(\mathfrak{G})$.
$\mathfrak{g} \ (\subset \mathfrak{T})$	Eine beliebige Gruppe in $\mathfrak{T}$.
$\mathbb{G} := \mathbb{G}(\mathfrak{T})$	Die Menge aller Gruppen in $\mathfrak{T}$.
$\mathfrak{d}$	Ein beliebiges Dreiecksystem in $\mathfrak{T}$.

LEBENSLAUF

Am 8. September 1938 wurde ich, Panajotis Maroudas, in Patras (Griechenland) geboren. Meine Eltern sind Alekos Maroudas, Kaufmann, und Frau Zoe Maroudas, geb. Chrysanthakopoulos.
In Patras besuchte ich von Oktober 1944 bis Juni 1949 die Volksschule. Ab Herbst 1949 wurde ich in das III. Gymnasium in Patras aufgenommen, an dem ich im Juni 1955 die Reifeprüfung ablegte. Drei Monate später bestand ich die Aufnahmeprüfung an der Nationalen Technischen Universität zu Athen. Dort nahm ich im Oktober 1955 das Studium an der Fakultät für Bauingenieurwesen auf und fünf Jahre später, im Juli 1960, legte ich die Diplom-Prüfung ab.

Im Herbst 1960 wurde ich als Wehrdienstpflichtiger zur Griechischen Armee einberufen. Nach einem entsprechenden Studium wurde ich zum Leutnant befördert.

Als Stipendiat des Französischen Außenministeriums absolvierte ich von 1964 bis 1967 an dem Centre de Hautes Etudes de la Construction (C.H.E.C) bzw. dem Centre d' Essais des Structures (C.E.S) in Paris ein Aufbaustudium im Bauingenieurwesen mit Spezialgebiet Spannbeton. Während dieser Studien war ich Gasthörer an der Sorbonne, wo mich das hohe mathematische Niveau sehr beeindruckte. Daraufhin entschied ich mich, ein Mathematikstudium zu beginnen.

Nach meiner Rückkehr nach Griechenland studierte ich Mathematik an der Nationalen Universität zu Athen, wo ich im Juli 1970 die Diplom-Prüfung mit Auszeichnung bestand. Sodann bekam ich die Stelle eines Assistenten, deren Dienstgeschäfte ich zwei Jahre verwaltete.

Im Oktober 1972 wurde ich von der Universität Athen beurlaubt und als Stipendiat des Griechischen Koordinationsministeriums am Fachbereich Mathematik der Universität Tübingen immatrikuliert. Seitdem bin ich Schüler von Herrn Prof. Dr. H.Heyer.

Meine Dissertation " Untersuchungen über extremalendliche Halbgruppen von Matrizen mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Halbgruppen " fertigte ich am Mathemathischen Institut der Universität Tübingen unter der Anleitung von Herrn Heyer an.

Seit dem 9. Januar 1972 bin ich mit Lefki Maroudas geb. Papacharitonos verheiratet. Am 20. September 1974 ist unsere Tochter Stella-Zoe in Tübingen geboren.

Meine akademischen Lehrer, die mich geprägt haben und denen ich viel verdanke, waren die griechischen Professoren F. Vassiliou, E. Kokkinopoulos, D. Kappos und D. Kotsakis sowie ihre deutschen Kollegen H. Heyer, W. Kaup und H.H. Schaefer.